Banque PT 1999 : Mathématiques II-B

Première partie

1 La droite vectorielle de base $\vec{e_3}$ et le plan de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ sont stables par f

$$E_1 \times {}^tE_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G$$

$f(\vec{e_3}) = \vec{e_3}$ donc la droite vectorielle de base $\vec{e_3}$ est stable par f.
$f(\vec{e_1}) = \vec{e_1}$ et $f(\vec{e_2}) = 2\alpha\vec{e_1} + \vec{e_2}$, vecteurs qui constituent une famille génératrice et libre (base !) du plan vectoriel image du plan de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$, sont des vecteurs de ce plan. Par suite, le plan vectoriel de base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est stable par f.

2 Les valeurs propres $\{\mu_i\}_{1\leq i\leq 3}$ de $g \circ f$ sont strictement positives

$$G \times F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(G \times F - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha^2+1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(G\times F-\lambda I_3) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(4\alpha^2+1-\lambda)-4\alpha^2] = (1-\lambda)[\lambda^2-2(2\alpha^2+1)\lambda+1]$$

Le discriminant réduit du polynôme entre crochets est :
$\Delta' = (2\alpha^2+1)^2 - 1 = 4\alpha^2(\alpha^2+1)$.
Comme $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$, l'ensemble des valeurs propres (réelles) de $g \circ f$ est donc $\{2\alpha^2+1+2|\alpha|\sqrt{\alpha^2+1}, 2\alpha^2+1-2|\alpha|\sqrt{\alpha^2+1}, 1\}$, ou encore : $\{2\alpha^2+1+2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}, 2\alpha^2+1-2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}, 1\}$.

Le produit des 2 valeurs propres qui ne sont pas égales à 1 vaut 1 comme produit des zéros d'un polynôme du second degré, et sont donc de même signe. Or, au moins une des deux est strictement positive (évident sur les formules ci-dessus). Donc les 3 valeurs propres sont strictement positives et on peut donc les numéroter de sorte que $\mu_1 > \mu_2$. De plus $\mu_1\mu_2 = 1 = \mu_3$.

3 Vecteurs $\vec{u_1} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\vec{e_1} + \vec{e_2}$

a) Relations sur a et b pour que $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$

$\vec{u_1} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\vec{e_1} + \vec{e_2}$, donc $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ si et seulement si $ab + 1 = 0$.
$f(\vec{u_1}) = af(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) = (a + 2\alpha)\vec{e_1} + \vec{e_2}$
$f(\vec{u_2}) = bf(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) = (b + 2\alpha)\vec{e_1} + \vec{e_2}$
$f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si et seulement si $ab + 2\alpha(a + b) + 4\alpha^2 + 1 = 0$
Donc $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} ab + 1 & = & 0 \\ ab + 2\alpha(a + b) + 4\alpha^2 + 1 & = & 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} ab & = & -1 \\ a + b & = & -2\alpha \end{cases}$$

Donc $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$ et $f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$ si et seulement si a et b sont racines de l'équation $x^2 + 2\alpha x - 1 = 0$, soit :

$$\{a, b\} = \{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}, -\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}\}$$

b) Détermination de a et b pour que B et $(f(\vec{u_i}))_{1 \leq i \leq 3}$ soient des bases orthogonales

Si $\vec{u_3} = \vec{e_3}$, $\vec{u_1} = a\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{u_2} = b\vec{e_1} + \vec{e_2}$, alors $\vec{u_3}$ est orthogonal à $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
Pour que $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ soit une base orthogonale, il faut et il suffit d'avoir :

$$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$$

De même $(f(\vec{u_i}))_{1 \leq i \leq 3}$ est une base orthogonale si et seulement si :

$$f(\vec{u_1}) \cdot f(\vec{u_2}) = 0$$

Par suite les deux propriétés sont acquises simultanément si et seulement si a et b prennent les valeurs trouvées dans la question précédente.
Nous avons alors le déterminant des vecteurs de la base B dans la base canonique B_c :

$$\det{}_{B_c}(B) = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a - b$$

Donc B sera de sens direct si et seulement si $a > b$, donc si et seulement si $a = -\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}$ et $b = -\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}$. Dans ce cas,

$$\begin{cases} \vec{u_1} &= (-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{u_2} &= (-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})\vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{u_3} &= \vec{e_3} \end{cases}$$

4 B est une base de vecteurs propres de $g \circ f$

$$\begin{aligned} g \circ f(\vec{u_1}) &= (-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})(\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) + [2\alpha\vec{e_1} + (4\alpha^2+1)\vec{e_2}] \\ &= (\alpha + \sqrt{\alpha^2+1})\vec{e_1} + [2\alpha^2 + 1 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}]\vec{e_2} \end{aligned}$$

Or $(2\alpha^2 + 1 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+1})(-\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}) = \alpha + \sqrt{\alpha^2+1}$, donc $\vec{u_1}$ est un vecteur propre de $g \circ f$ de valeur propre $2\alpha^2 + 1 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}$.
De même :

$$\begin{aligned} g \circ f(\vec{u_2}) &= (-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})(\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) + [2\alpha\vec{e_1} + (4\alpha^2+1)\vec{e_2}] \\ &= (\alpha - \sqrt{\alpha^2+1})\vec{e_1} + [2\alpha^2 + 1 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}]\vec{e_2} \end{aligned}$$

Or $(2\alpha^2 + 1 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2+1})(-\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}) = \alpha - \sqrt{\alpha^2+1}$, donc $\vec{u_2}$ est un vecteur propre de $g \circ f$ de valeur propre $2\alpha^2 + 1 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}$.
Évidemment, $\vec{u_3}$ est un vecteur propre de $g \circ f$ de valeur propre 1.

5 Valeur de θ telle que $s = r_\theta^{-1} \circ f$ soit symétrique, de valeurs propres > 0

Avec les conventions de l'énoncé :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 2\alpha\cos\theta + \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -2\alpha\sin\theta + \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S est symétrique si et seulement si $2\alpha\cos\theta + \sin\theta = -\sin\theta$ c'est-à-dire si et seulement si $\sin\theta = -\alpha\cos\theta$. Alors :

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \alpha\cos\theta & 0 \\ \alpha\cos\theta & (2\alpha^2+1)\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique associée à s est :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & \alpha\cos\theta & 0 \\ \alpha\cos\theta & (2\alpha^2+1)\cos\theta - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$(1-\lambda)\Big[\Big((2\alpha^2+1)\cos\theta-\lambda\Big)(\cos\theta-\lambda)-\alpha^2\cos^2\theta\Big]=0$$

$$(1-\lambda)\Big(\lambda^2-2(\alpha^2+1)\cos\theta\ \lambda+(\alpha^2+1)\cos\theta\Big)=0$$

Résolvons l'équation $\lambda^2-2(\alpha^2+1)\cos\theta\ \lambda+(\alpha^2+1)\cos\theta=0$.
$\Delta'=(\alpha^2+1)^2\cos^2\theta-(\alpha^2+1)\cos^2\theta=\alpha^2(\alpha^2+1)\cos^2\theta>0$.
Les valeurs propres autres que 1 ont le signe de la somme des racines soit de $\cos\theta$. Pour qu'elles soient positives, il faut choisir θ dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, soit :

$$\theta=-\arctan(\alpha)$$

Deuxième partie

1 Étude de suites

$\vec{Op_0}=f(\vec{Om_0})$, $\vec{Om_{n+1}}=g(\vec{Op_n})$ et $\vec{Op_{n+1}}=f(\vec{Om_{n+1}})$, avec :

$$F=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad G=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad GF=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$\mu_1=3+2\sqrt{2}$, $\mu_2=3-2\sqrt{2}$ et $\mu_3=1$.
$\vec{u_1}=(\sqrt{2}-1)\vec{e_1}+\vec{e_2}$ est vecteur propre de $g\circ f$ de valeur propre μ_1.
$\vec{u_2}=(-\sqrt{2}-1)\vec{e_1}+\vec{e_2}$ est vecteur propre de $g\circ f$ de valeur propre μ_2.
$\vec{u_3}=\vec{e_3}$ est vecteur propre de $g\circ f$ de valeur propre $\mu_3=1$.

a) Étude des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\tilde{z}_0=z_0$, les deux suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tilde{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes, tous leurs termes sont égaux à z_0.

b) Étude conjointe des suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\vec{Op_n}=f(\vec{Om_n})$, donc pour tout entier $n\geq 0$, $\tilde{y}_n=y_n$.
$\vec{Om_{n+1}}=g(\vec{Op_n})$, donc pour tout entier $n\geq 0$, $x_{n+1}=\tilde{x}_n$.
Par suite $\Big(x_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\Big(\tilde{x}_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\Big(y_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\Big(\tilde{y}_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2 Étude de la suite convergente $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) $\vec{Om}$ est un vecteur invariant par $g \circ f$

Pour tout entier naturel n, $g \circ f(\vec{Om_n}) = \vec{Om_{n+1}}$, d'où :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= & x_n &+ & 2y_n \\ y_{n+1} &= & 2x_n &+ & 5y_n \end{cases}$$

Par suite si $\left(m_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers m de coordonnées (x, y, z), on aura :

$$\begin{cases} x &= & x &+ & 2y \\ y &= & 2x &+ & 5y \\ z &= & z & & (= z_0) \end{cases}$$

Donc $\vec{Om}$ est invariant par $g \circ f$.

b) Définition géométrique de m

On en déduit que $\vec{Om}$ est un vecteur propre de $g \circ f$ de valeur propre 1. En résolvant le système précédent, on trouve que m est nécessairement le point de coordonnées $(0, 0, z_0)$.

3 Étude de la matrice M'_n

$$M'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \\ z'_n \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

a) Identification de M'_n

M'_n représente la matrice de $\vec{Om_n}$ dans la base B.

b) Relation de récurrence liant M'_{n+1} et M'_n

Comme $\vec{Om_{n+1}} = g \circ f(\vec{Om_n})$,

$$M'_{n+1} = \mathcal{M}_B(g \circ f) M'_n$$

c'est-à-dire :

$$M'_{n+1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} M'_n$$

$$M'_{n+1} = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M'_n$$

Par suite $x'_{n+1} = (3+2\sqrt{2})x'_n$, $y'_{n+1} = (3-2\sqrt{2})y'_n$, et $z'_{n+1} = z'_n$, et donc

$$\begin{cases} x'_n = (3+2\sqrt{2})^n x'_0 \\ y'_n = (3-2\sqrt{2})^n y'_0 \\ z'_n = z'_0 \end{cases}$$

c) Condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(M'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente

Comme $3+2\sqrt{2} > 1$, pour que $\left(M'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il faut et il suffit que $x'_0 = 0$. $\left(y'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $\left(z'_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(z'_0\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4 Étude de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) Condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(m_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

La suite $\left(m_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $x'_0 = 0$ donc si et seulement si m_0 appartient au plan Π engendré par $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$.
Son équation est donc :

$$\begin{vmatrix} x & -\sqrt{2}-1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire :

$$x + (\sqrt{2}+1)y = 0$$

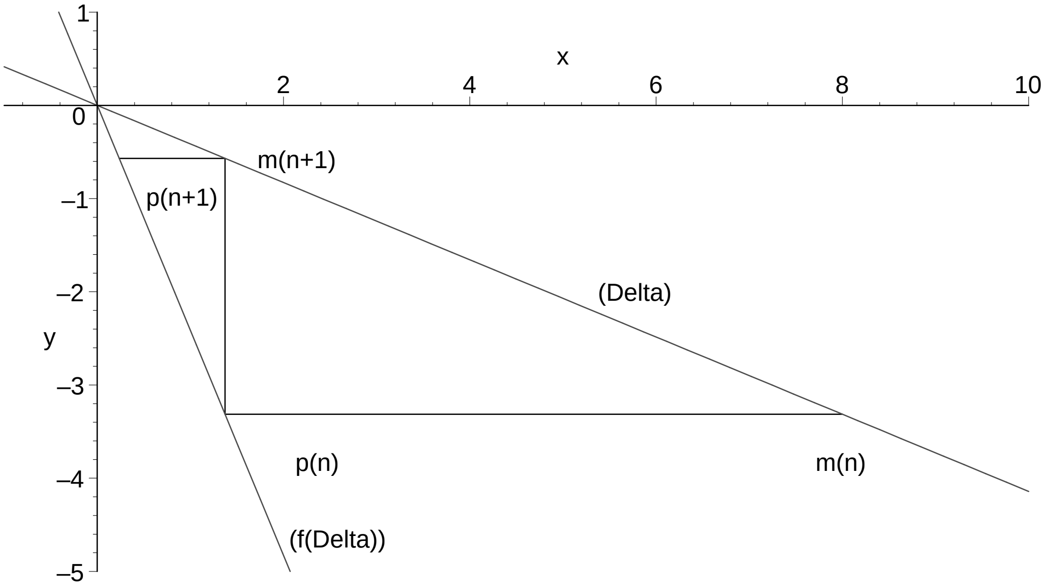
b) Les points m_n et p_n appartiennent à des droites

Si m_0 appartient à Π sans appartenir à la droite vectorielle de base $(\vec{e}_3)$, alors $x_0 + (\sqrt{2}+1)y_0 = 0$ sans que $(x_0, y_0) = (0,0)$.
Alors pour tout entier naturel n, $x'_n = 0$ donc $x_n + (\sqrt{2}+1)y_n = 0$ et $z_n = z_0$.
Donc les points m_n appartiennent à la droite (Δ) dont les équations sont :

$$(\Delta)\begin{cases} x + (\sqrt{2}+1)y & = & 0 \\ z & = & z_0 \end{cases}$$

Quant aux points p_n, ils appartiennent à la droite $(\Delta') = f(\Delta)$.

c) Construction géométrique des points m_n et p_n



Si m_0 est un point de Π tel que $z_0 = 0$, $\vec{Om_0} = y'_0\ \vec{u}_2$ ($y'_0 \neq 0$) et pour tout entier naturel n, $\vec{Om_n} = (3-2\sqrt{2})^n y_0\ \vec{u}_2 = (3-2\sqrt{2})^n \vec{Om_0}$

Donc m_n se déduit de m_0 par une homothétie de centre O et de rapport $(3-2\sqrt{2})^n$. Bien entendu, m_{n+1} se déduit de m_n par une homothétie de centre O et de rapport $(3-2\sqrt{2})$.

Pour tout entier naturel n, les points m_n (notés « m(n) » sur le dessin) appartiennent à la droite Δ (notée « (Delta) » sur le dessin) du plan $z = 0$, dirigée par le vecteur $\vec{t} = (\sqrt{2}+1)\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, passant par O.

La droite Δ' (notée « (f(Delta)) » sur le dessin), ensemble des points p_n (notés « p(n) » sur le dessin), est une droite du plan d'équation $z = 0$ dirigée par le vecteur $f(\vec{t}) = (\sqrt{2}+1)\vec{e}_1 - (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (\sqrt{2}-1)\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, passant pas O.

Pour chaque valeur de n, $\tilde{y}_n = y_n$ car la deuxième ligne de F est $[0, 1, 0]$. p_n est le point de Δ' ayant la même ordonnée que m_n.

D'autre part, les abscisses de p_n et m_{n+1} sont égales, donc la droite $p_n m_{n+1}$ est parallèle à l'axe des y. On peut donc obtenir m_{n+1} à partir de p_n en cherchant l'intersection de Δ avec la parallèle à Oy passant par p_n (voir le dessin).

Troisième partie

1 Étude des endomorphismes définis positifs

a) Si un endomorphisme est défini positif alors ses valeurs propres sont strictement positives

λ étant une valeur propre de ϕ et $\vec{x}$ étant un vecteur propre de ϕ de valeur propre λ,

$$\vec{x} \cdot \phi(\vec{x}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{x}) > 0$$

Comme $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ (car $\vec{x}$ étant un vecteur propre est différent de $\vec{0}$, on a bien $\lambda > 0$).

b) Si les valeurs propres d'un endomorphisme ϕ sont strictement positives alors il est défini positif

ϕ étant un endomorphisme symétrique, il possède une base propre orthonormale $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ associée (respectivement) aux valeurs propres réelles $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ supposées ici strictement positives.
$\vec{x}$ étant un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, il existe trois réels x_1, x_2 et x_3 non tous nuls tels que $\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$.
Alors

$$\phi(\vec{x}) = \phi(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3) = \lambda_1 x_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 x_3 \vec{v}_3$$

et

$$\vec{x} \cdot \phi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 > 0$$

Donc ϕ est défini positif.

c) $g \circ f$ est symétrique et défini positif

$\mathcal{M}_{B_c}(g \circ f) = G \times F = {}^tF \times F$.
Alors ${}^t(G \times F) = {}^tF \times {}^tG = G \times F = \mathcal{M}_{B_c}(g \circ f)$
Donc $g \circ f$est un endomorphisme symétrique.
Soit $\vec{x}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$.
Alors $(g \circ f)(\vec{x})$ a pour matrice

$$({}^tFF) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{array}{rcl}\vec{x}\cdot(g\circ f)(\vec{x}) & = & (\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,)\cdot {}^tFF\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\ & = & \Big((\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,)\,{}^tF\Big)\Big(F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Big)\\ & = & {}^t\Big(F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Big)\cdot\Big(F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Big)\\ & = & f(\vec{x})\cdot f(\vec{x})\end{array}$$

(Produit scalaire de $f(\vec{x})$ avec $f(\vec{x})$)
Comme $\vec{x}\neq\vec{0}$ et $\det(f)>0$, $f(\vec{x})\neq\vec{0}$ et donc :

$$f(\vec{x})\cdot f(\vec{x})>0$$

Finalement,

$$\vec{x}\cdot(g\circ f)(\vec{x})>o$$

et donc $g\circ f$ est un endomorphisme symétrique défini positif.

2 Étude d'une famille orthogonale $(\vec{u}_i)_{1\leq i\leq 3}$

a) Si $\big(\vec{u}_i\big)_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale de vecteurs propres de $g\circ f$, $\big(f(\vec{u}_i)\big)_{1\leq i\leq 3}$ est aussi une base orthogonale

On désigne respectivement par λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. Les réels λ_1, λ_2 et λ_3 sont strictement positifs.
Pour tout couple (i,j) tel que $1\leq i\leq 3$, $1\leq j\leq 3$ et $i\neq j$,

$$\begin{array}{rcl}f(\vec{u}_i)\cdot f(\vec{u}_j) & = & {}^t\Big(FU_i\Big)\times\Big(FU_j\Big)\\ & = & {}^tU_i\times{}^tF\times F\times U_j\\ & = & {}^tU_i(\lambda_jU_j)\\ & = & \lambda_j{}^tU_iU_j\\ & = & 0\end{array}$$

Donc $\big(f(\vec{u}_i)\big)_{1\leq i\leq 3}$ est une base orthogonale.

b) Si $\left(\vec{u}_i\right)_{1\leq i\leq 3}$ et $\left(f(\vec{u}_i)\right)_{1\leq i\leq 3}$ sont des bases orthogonales, alors $\left(\vec{u}_i\right)_{1\leq i\leq 3}$ est une base de vecteurs propres de $g\circ f$

Pour tout couple (i,j) tel que $1\leq i\leq 3$, $1\leq j\leq 3$ et $i\neq j$,

$$\begin{array}{rcl}\vec{u}_i\cdot(g\circ f)(\vec{u}_j) & = & {}^tU_i\cdot(GF)U_j\\ & = & ({}^tU_i{}^tF)\cdot(FU_j)\\ & = & {}^t(FU_i)\cdot(FU_j)\\ & = & f(\vec{u}_i)\cdot f(\vec{u}_j)\\ & = & 0\end{array}$$

Par suite $(g\circ f)(\vec{u}_j)$ a des composantes nulles sur les $\vec{u}_i$ pour $i\neq j$. Donc $\vec{u}_j$ est un vecteur propre de $g\circ f$ et $\left(\vec{u}_i\right)_{1\leq i\leq 3}$ est une base de vecteurs propres de $g\circ f$.

3 Étude d'une base orthonormale de vecteurs propres $B=(\vec{u}_i)_{1\leq i\leq 3}$ de $g\circ f$, de valeurs propres μ_i

a) Démonstration de ${}^tFF=\sum_{i=1}^{3}\mu_iU_i{}^tU_i$

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique :

$$\mathcal{M}_{B_c}(h)=\sum_{i=1}^{3}\mu_iU_i{}^tU_i$$

Calculons la matrice de $h(\vec{u}_k)$ dans la base canonique pour tout entier k, $1\leq k\leq 3$.

$$\mathcal{M}_{B_c}(h(\vec{u}_k))=\sum_{i=1}^{3}\mu_i(U_i{}^tU_i)U_k=\sum_{i=1}^{3}\mu_iU_i({}^tU_iU_k)=\mu_kU_k$$

Donc

$$h(\vec{u}_k)=\mu_k\vec{u}_k=(g\circ f)(\vec{u}_k)$$

h coïncidant avec $(g\circ f)$ sur une base de $\mathbb{R}^3$ est égal à $(g\circ f)$. Donc :

$${}^tFF=\sum_{i=1}^{3}\mu_iU_i{}^tU_i$$

b) Calcul de S^2 avec $S=\sum_{i=1}^{3}\lambda_iU_i{}^tU_i$ et $\lambda_i=\sqrt{\mu_i}$

Posons $I=\{1,2,3\}$.

$$S^2=\sum_{(i,j)\in I^2}\lambda_i\lambda_jU_i{}^tU_iU_j{}^tU_j$$

Pour $j=i$, ${}^tU_iU_i=1$ et pour $j\neq i$, ${}^tU_iU_j=0$ puique la base $\left(\vec{u_i}\right)_{1\leq i\leq 3}$ est orthonormale. Donc

$$S^2=\sum_{(i,j)\in I^2}\lambda_i\lambda_j U_i{}^tU_iU_j{}^tU_j={}^tFF$$

L'endomorphisme s de matrice S est un endomorphisme symétrique, défini positif.

$$\begin{array}{rcl}
{}^tS & = & {}^t\Big(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\ U_i{}^tU_i\Big)\\
& = & \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\ {}^t\Big(U_i{}^tU_i\Big)\\
& = & \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\ U_i{}^tU_i\\
{}^tS & = & S
\end{array}$$

Donc s est un endomorphisme symétrique.
Soit $\vec{x}$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}=x_1\vec{u_1}+x_2\vec{u_2}+x_3\vec{u_3}$.
La matrice de $s(\vec{x})$ dans la base canonique est :

$$\mathcal{M}_{B_c}(s(\vec{x}))=\Big(\sum_{i=1}^{3}\lambda_iU_i{}^tU_i\Big)\Big(\sum_{k=1}^{3}x_kU_k\Big)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_ix_iU_i$$

car pour $k\neq i$, ${}^tU_iU_k=0$ et pour $k=i$, ${}^tU_iU_i=1$, comme ci-dessus.
Alors :

$$\vec{x}\cdot s(\vec{x})=\Big(\sum_{k=1}^{3}x_kU_k\Big)\times\sum_{i=1}^{3}\lambda_ix_iU_i=\sum_{i=1}^{3}\lambda_ix_i^2$$

Donc s est un endomorphisme symétrique défini positif.

4 Décomposition de f en la composition d'un endomorphisme symétrique défini positif et d'une rotation

a) $R=FS^{-1}$ est une matrice orthogonale

$R=FS^{-1}$ donc ${}^tR={}^t(S^{-1})\ {}^tF=S^{-1}\ {}^tF$ car S est symétrique.
Donc :

$$\begin{array}{rcl}
R\ {}^tR & = & F\ S^{-1}\ S^{-1}\ {}^tF\\
& = & F\ (S^{-1})^2\ {}^tF\\
& = & F\ (S^2)^{-1}\ {}^tF
\end{array}$$

Comme $S^2 = {}^tF\ F$,

$$\begin{aligned} R\,{}^tR &= F\ ({}^tF\ F)^{-1}\ {}^tF \\ &= F\ F^{-1}\ ({}^tF)^{-1}\ {}^tF \\ &= I_3 \end{aligned}$$

Donc ${}^tR = R^{-1}$: R est orthogonale.

b) Décomposition de f en la composition d'un endomorphisme symétrique défini positif et d'une rotation

$F = RS$ est équivalent à $f = r \circ s$.
R étant une matrice orthogonale, r est une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

$$\det(r) = \det(R) = \det(F) \times \det(S^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \det(F) > 0$$

Donc r est une isométrie positive de $\mathbb{R}^3$, donc une rotation vectorielle.
(On a déja montré dans la question 3.b de la troisième partie que s était un endomorphisme symétrique défini positif.)

5 Expression de R à l'aide de Q et Q'

a) B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$

Pour $1 \leq i \leq 3$,

$$r(\vec{u}_i) = \vec{u'}_i$$

r étant une isométrie, transforme une base orthonormale en une base orthonormale.
Donc B' est une base orthonormale de de $\mathbb{R}^3$.

b) Expression de R à l'aide de Q et Q'

R peut être interprété comme la matrice de passage de la base B à la base B'.
Q est la matrice de $Id_{\mathbb{R}^3}$ (application identique $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$), l'espace de départ $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base B, l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base B_c, puisque les colonnes de Q contiennent les composantes de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base B_c.
$(Q')^{-1}$ est la matrice de $Id_{\mathbb{R}^3}$, l'espace de départ $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base B_c, l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base B', puisque les colonnes de Q' contiennent les composantes de $(\vec{u'}_1, \vec{u'}_2, \vec{u'}_3)$ dans la base B_c.
Donc

$$R = Q' \times {}^tQ$$

6 Image par f d'une sphère centrée en O et de rayon ρ

f transforme le vecteur $\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$ en le vecteur $\vec{y} = y_1\vec{u'}_1 + y_2\vec{u'}_2 + y_3\vec{u'}_3$ tel que $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_2 = \lambda_2 x_2$, $y_3 = \lambda_3 x_3$, donc :

$$x_1 = \frac{y_1}{\lambda_1} \quad , \quad x_2 = \frac{y_2}{\lambda_2} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{y_3}{\lambda_3}$$

m tel que $\vec{Om} = \vec{x}$ appartient à la sphère de centre O et de rayon ρ si et seulement si :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$$

donc si et seulement si :

$$\frac{y_1^2}{(\lambda_1\rho)^2} + \frac{y_2^2}{(\lambda_2\rho)^2} + \frac{y_3^2}{(\lambda_3\rho)^2} = 1$$

dans la base B'.
Donc l'image par f d'une sphère centrée en O et de rayon ρ est un ellipsoïde de centre O dont les axes sont portés par les axes de coordonnées du repère (O, B'), les longueurs de demi-axes étant $\lambda_1\rho$, $\lambda_2\rho$ et $\lambda_3\rho$.

Appendice : procédure en langage Maple V pour le dessin de la question 4.c de la deuxième partie

```
###########################################################################
fig1:=proc()
###########################################################################
# Programme MAPLE V pour d\'essiner une figure pour la
# question II.4.c de l'\'epreuve II.B de la banque PT 1999.
#  Mode d'emploi : sous Maple V (pour MSDOS et MS Windows *) :
#      read `T:\\monrep\\M99DT2Fc.txt`;
#  o\`u T:\monrep\ est le chemin d'acc\`es MSDOS du fichier, puis :
#      fig1();
#  Mode d'emploi sous Maple V (unix, Linux, FreeBSD,...) :
#      read `monrep/M99DT2Fc.txt`;
#  o\`u monrep est le chemin d'acc\`es unix du fichier, comme
#  /home/daniel/tex/d836 puis :
#      fig1();
###########################################################################
local g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_m_n,g_m_np1,g_p_n,g_p_np1,g_delta,g_deltap,\
      x_m_n,y_m_n,x_m_np1,y_m_np1,x_p_n,y_p_n,x_p_np1,y_p_np1,\
      x_delta,y_delta,x_deltap,y_deltap;
```

```
with(plots):

# Si on veut faire des essais sur 'ecran, commenter interface,
# cad les trois lignes suivantes. Pour obtenir un fichier
# PostScript, d\'ecommenter ! Pour modifier le dessin, etc...
# changer \`a votre convenance suivant l'OS, les chemins...
#interface(plotdevice=postscript,\
#plotoutput=`/home/daniel/tex/d836/M99DT2Fc.eps`,\
#plotoptions=`noborder`):

# les 2 droites Delta et Delta' :
g_1:=plot((-1/(sqrt(2)+1))*x,x=-1..10,y=-5..1,scaling=CONSTRAINED);
g_2:=plot((1/(-sqrt(2)+1))*x,x=-1..10,y=-5..1,scaling=CONSTRAINED);

# \'Etiquette pour le point m(n)
x_m_n:=8.0:
y_m_n:=evalf(x_m_n*(-1/(sqrt(2)+1))):
g_m_n:=PLOT(TEXT([x_m_n , y_m_n-0.50],`m(n)`));


# \'Etiquette pour le point m(n+1)
x_m_np1:=evalf(x_m_n*(3-2*sqrt(2))):
y_m_np1:=evalf(y_m_n*(3-2*sqrt(2))):
g_m_np1:=PLOT(TEXT([x_m_np1+0.80 , y_m_np1],`m(n+1)`));

# \'Etiquette pour le point p(n)
y_p_n:=y_m_n:
x_p_n:=evalf(y_p_n*((-sqrt(2)+1))):
g_p_n:=PLOT(TEXT([x_p_n + 1.0 , y_p_n-0.50],`p(n)`));

# \'Etiquette pour le point p(n+1)
x_p_np1:=evalf(x_p_n*(3-2*sqrt(2))):
y_p_np1:=evalf(y_p_n*(3-2*sqrt(2))):
g_p_np1:=PLOT(TEXT([x_p_np1 + 0.7 , y_p_np1-0.40],`p(n+1)`));

# \'Etiquette pour la droite Delta
x_delta:=x_m_n*0.6+1.0:
y_delta:=y_m_n*0.6:
g_delta:=PLOT(TEXT([x_delta , y_delta],`(Delta)`));

# \'Etiquette pour la droite Delta'
x_deltap:=x_p_n*1.4+0.70:
```

```
y_deltap:=y_p_n*1.4:
g_deltap:=PLOT(TEXT([x_deltap , y_deltap],`(f(Delta))`));

# trac\'e de la droite m(n)p(n)
g_3:=PLOT(CURVES([[x_m_n,y_m_n],[x_p_n,y_p_n]])):

# trac\'e de la droite m(n+1)p(n+1)
g_4:=PLOT(CURVES([[x_m_np1,y_m_np1],[x_p_np1,y_p_np1]])):

# trac\'e de la droite m(n+1)p(n)
g_5:=PLOT(CURVES([[x_m_np1,y_m_np1],[x_p_n,y_p_n]])):


display([g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_delta,g_deltap,g_m_n,g_m_np1,g_p_n,g_p_np1]):

end;
##########################################################################
```