Banque PT 2000 : Mathématiques II-B

Première partie

1. (a) Ensemble des solutions de (E)

Par théorème, le système différentiel (E) possède une solution unique $\overrightarrow{F}$ telle que $\overrightarrow{F}(t_0) = \overrightarrow{F_0}$ où t_0 et $\overrightarrow{F_0}$ sont fixés.

1. (b) S'il existe un réel t_0 tel que $\overrightarrow{F}(t_0) = \overrightarrow{0}$, la fonction $\overrightarrow{F}$ est nulle

Désignons par $\overrightarrow{\Theta}$ la fonction nulle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^3$. Cette fonction est solution de (E) et $\overrightarrow{\Theta}(t_0) = \overrightarrow{0}$. Donc si $\overrightarrow{F}$ est solution de (E) telle que $\overrightarrow{F}(t_0) = \overrightarrow{0}$, d'après la question 1.a, $\overrightarrow{\Theta}$ et $\overrightarrow{F}$ sont confondues.

2. (a) ν et $\overrightarrow{f}$ sont des fonctions dérivables

Désignons par f_1 , f_2 , f_3 les coordonnées de $\overrightarrow{F}$ dans la base B_0 . Comme $\overrightarrow{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, les trois fonctions coordonnées f_1 , f_2 , f_3 sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et par suite $\nu = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$ aussi.
Comme $\overrightarrow{F}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, ν ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc $\frac{1}{\nu}$ sera de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. $\overrightarrow{f}$ étant le produit de la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ et de $\frac{1}{\nu}$, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$, est une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. (b) $\overrightarrow{f}(t)$ et $\overrightarrow{f'(t)}$ sont deux vecteurs orthogonaux pour tout réel t

$||\overrightarrow{f}(t)|| = 1$ et donc $(\overrightarrow{f})^2(t) = 1$.
Si nous dérivons, nous obtenons

$$2\overrightarrow{f}(t).\overrightarrow{f'}(t) = 0$$

donc $\overrightarrow{f}(t)$ et $\overrightarrow{f'(t)}$ sont deux vecteurs orthogonaux pour tout réel t.

2. (c) Calcul de la dérivée de ν

$\nu(t) = \sqrt{(\overrightarrow{F}(t))^2}$, donc

$$\nu'(t) = \frac{\overrightarrow{F(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)}}{\nu(t)} = \overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)}$$

3. La fonction vectorielle satisfait à

$$\frac{d\overrightarrow{f}}{dt} = a(\overrightarrow{f}\,) - (a(\overrightarrow{f}\,) \cdot \overrightarrow{f}\,)\overrightarrow{f}$$

Nous avons :

$$\overrightarrow{F'(t)} = a(\overrightarrow{F}\,) = a(\nu(t).\overrightarrow{f(t)}) = \nu(t).a(\overrightarrow{f(t)})$$

à cause de la linéarité de a. D'autre part :

$$\overrightarrow{F(t)} = \nu(t).\overrightarrow{f(t)}$$

d'où

$$\overrightarrow{F'(t)} = \nu'(t).\overrightarrow{f(t)} + \nu(t).\overrightarrow{f(t)}$$

et donc :

$$\nu(t).a(\overrightarrow{f(t)}) = \left(\overrightarrow{f(t)} \cdot \overrightarrow{F'(t)}\right).\overrightarrow{f(t)} + \nu(t).\overrightarrow{f'(t)}$$

en vertu de la question 2. (b). Remplaçons $\overrightarrow{F'(t)}$:

$$\nu(t).a(\overrightarrow{f(t)}) = \left(\overrightarrow{f(t)} \cdot a\left(\nu(t).\overrightarrow{f(t)}\right)\right).\overrightarrow{f(t)} + \nu(t).\overrightarrow{f'(t)}$$

En utilisant la linéarité de a et la bilinéarité du produit scalaire, nous en déduisons :

$$\nu(t).a(\overrightarrow{f(t)}) = \nu(t)\left(\overrightarrow{f(t)} \cdot a\left(\overrightarrow{f(t)}\right)\right).\overrightarrow{f(t)} + \nu(t).\overrightarrow{f'(t)}$$

Nous pouvons simplifier par $\nu(t)$ qui est toujours non nul :

$$\overrightarrow{f'(t)} = a(\overrightarrow{f(t)}) - (a(\overrightarrow{f(t)}) \cdot \overrightarrow{f(t)})\overrightarrow{f(t)}$$

donc :

$$\frac{d\overrightarrow{f}}{dt} = a(\overrightarrow{f}\,) - (a(\overrightarrow{f}\,) \cdot \overrightarrow{f}\,)\overrightarrow{f}$$

Deuxième partie

1. (a) Expression de $z(t)$

Le système (E) peut être écrit :

$$\begin{array}{rcll} x'(t) & = & & G(\lambda-1)\ y(t) \\ y'(t) & = & G(\lambda+1)\ x(t) & \\ z'(t) & = & 0 & \end{array}$$

Donc z est constant :

$$z(t) = z_0$$

1. (b) Intégration de (E) lorsque $x_0 = y_0 = 0$

La fonction $\overrightarrow{F}$ telle que $\overrightarrow{F(t)} = z_0 \overrightarrow{e_3}$ est une solution de (E) vérifiant les conditions initiales. Comme cette solution est unique, c'est la solution cherchée.

2. Démonstration de $r^2 x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$

On vient de voir que : $x'(t) = G(\lambda - 1)\ y(t)$ et $y'(t) = G(\lambda + 1)\ x(t)$. Donc :

$$r^2 x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = \Big[r^2 G(\lambda - 1) + G(\lambda + 1)\Big] x(t)y(t)$$

$$r^2 x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = G\Big[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(\lambda - 1) + (\lambda + 1))\Big] x(t)y(t) = 0$$

Courbes intégrales

On tire de ce qui précède que $r^2 x^2(t) + y^2(t)$ est constant :

$$r^2 x^2(t) + y^2(t) = r^2 x_0^2 + y_0^2$$

On obtient donc en intégrant les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & z_0 \\ \frac{x^2}{(\frac{\mu}{r})^2} + \frac{y^2}{\mu^2} & = & 1 \end{array} \right.$$

avec $\mu = \sqrt{r^2 x_0^2 + y_0^2}$.
Les courbes intégrales sont donc incluses dans des ellipses situées dans des plans "horizontaux", centrées sur l'axe des z, dont les axes sont des parallèles aux axes de coordonnées et dont le rapport des axes est fixe. Pour z_0 fixé, ces ellipses sont homothétiques les unes des autres.

3. (a) x et y sont solutions de l'équation différentielle

$$u'' + \omega^2 u = 0$$

D'après les deux premières équations du système (E),

$$x'(t) = G(\lambda - 1)\ y(t)$$

x' est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque y est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc :

$$x''(t) = G(\lambda - 1)\ y'(t) = G^2(\lambda^2 - 1)x(t)$$

et :

$$y'(t) = G(\lambda + 1)\ x(t)$$

donc :

$$y''(t) = G(\lambda + 1)\ x'(t) = G^2(\lambda^2 - 1)y(t)$$

3. (b) Intégration de (E) lorsque $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$

x est de la forme :

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$$

où α et β sont des constantes réelles.
$x(0) = \alpha = x_0$, donc $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$.
$x'(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t) = G(\lambda - 1)y(t)$
Nous en déduisons

$$x'(0) = \omega\beta = G(\lambda - 1)y_0$$

et

$$\beta = \frac{G(\lambda - 1)}{\omega} y_0 = -\frac{y_0}{r}$$

Donc :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) - \frac{y_0}{r} \sin(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{1}{G(\lambda - 1)} x'(t)$$

Nous en déduisons :

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + r x_0 \sin(\omega t)$$

3. (c) Si $x_0 \neq 0$, il existe une constante t_0 telle que :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = r \tan \omega(t - t_0)$$

D'après la question précédente,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0 \cos(\omega t) + r x_0 \sin(\omega t)}{x_0 \cos(\omega t) - \frac{y_0}{r} \sin(\omega t)} = r \frac{\frac{y_0}{r x_0} + \tan(\omega t)}{1 - \frac{y_0}{r x_0} \tan(\omega t)}$$

au moins dans un voisinage de $t = 0$, car x_0 est supposé non nul (continuité).
Donc il existe un réel t_0 de l'intervalle

$$\left]-\frac{\pi}{2\omega}, \frac{\pi}{2\omega}\right[$$

tel que

$$\tan(\omega t_0) = -\frac{y_0}{r x_0}$$

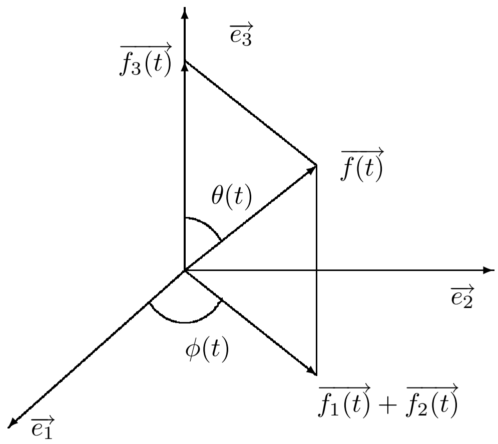
et on a alors :

$$\frac{y(t)}{x(t)} = r \tan \omega(t - t_0)$$

Remarque.
Sans condition sur x_0, on pouvait établir qu'avec ce même t_0, on avait pour tout t de $\mathbb{R}$, $x(t) = \sqrt{x_0^2 r^2 + y_0^2} \cos \omega(t - t_0)$ et $y(t) = r\sqrt{x_0^2 r^2 + y_0^2} \sin \omega(t - t_0)$, ce qui montrait que les ellipses étaient parcourues entièrement.

Troisième partie

1. (a) Figure illustrant la définition de $\theta(t)$ et $\phi(t)$



Désignons par $\overrightarrow{f_1(t)}$, $\overrightarrow{f_2(t)}$, $\overrightarrow{f_3(t)}$ les composantes respectives de $\overrightarrow{f(t)}$ sur les droites vectorielles Vect$(\overrightarrow{e_1})$, Vect$(\overrightarrow{e_2})$, Vect$(\overrightarrow{e_3})$.
$\theta(t)$ est l'angle de $\overrightarrow{f(t)}$ avec $\overrightarrow{e_3}$, cet angle étant un angle géométrique dont la mesure va de 0 à π.
$\phi(t)$ est l'angle de $\overrightarrow{f_1(t)}+\overrightarrow{f_2(t)}$, projection orthogonale de $\overrightarrow{f(t)}$ sur le plan Vect$(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, avec $\overrightarrow{e_1}$. Cet angle est orienté et appartient à un intervalle de longueur 2π.
En fait, il y a une infinité de réponses à cette question, et on ne comprendra que dans la question 5. (c) de la troisième partie quelle est la réponse "attendue" par le concepteur du problème !

1. (b) S'il existe t_0 tel que $\sin\theta(t_0) = 0$ alors $\sin\theta$ est la fonction nulle

S'il existe t_0 tel que $\sin\theta(t_0) = 0$, alors $\overrightarrow{F(t_0)} = z_0\overrightarrow{e_3}$ et, d'après la question 1. (b) de la deuxième partie, pour tout t,

$$\overrightarrow{F(t)} = z_0\overrightarrow{e_3}$$

et donc $\overrightarrow{f(t)}$ est $\overrightarrow{e_3}$ si $z_0 > 0$ et est $-\overrightarrow{e_3}$ si $z_0 < 0$.
$\theta(t)$ est constant et vaut soit 0, soit π, donc la fonction $t \mapsto \sin(\theta(t))$ est identiquement nulle.

1. (c) S'il existe t_0 tel que $\cos\theta(t_0) = 0$ alors $\cos\theta$ est la fonction nulle

D'après la question 1. (a) de la deuxième partie, $z(t) = z_0$. Donc si z_0 est nul, pour tout t, $t \mapsto \cos(\theta(t))$ est identiquement nulle.

1. (d) S'il existe t_0 tel que $\sin 2\theta(t_0) = 0$ alors θ est une fonction constante

S'il existe t_0 tel que $\sin 2\theta(t_0) = 0$, alors $2\sin\theta(t_0)\cos\theta(t_0) = 0$, donc on a $\sin\theta(t_0) = 0$ ou bien $\cos\theta(t_0) = 0$.
On se trouve donc dans un (et un seul) des deux cas précédents, donc θ est une fonction constante.

2. (a) Écriture de $\overrightarrow{f'(t)}$ en fonction de $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\theta'(t)$ et $\phi'(t)$

$$\overrightarrow{f(t)} = \sin\big(\theta(t)\big)\ \overrightarrow{u(t)} + \cos\big(\theta(t)\big)\ \overrightarrow{e_3}$$

$$\overrightarrow{u'(t)} = -\sin\big(\phi(t)\big)\ \phi'(t)\ \overrightarrow{e_1} + \cos\big(\phi(t)\big)\ \phi'(t)\ \overrightarrow{e_2} = \phi'(t)\ \overrightarrow{v(t)}$$

Nous en déduisons :

$$\overrightarrow{f'(t)} = \cos\big(\theta(t)\big)\ \theta'(t)\ \overrightarrow{u(t)} + \sin\big(\theta(t)\big)\ \phi'(t)\ \overrightarrow{v(t)} - \sin\big(\theta(t)\big)\ \theta'(t)\ \overrightarrow{e_3}$$

2. (b) Matrice $A_\phi(t)$ de a dans la base $B_\phi(t)$

Désignons par P la matrice de passage de la base B_0 à la base $B_\phi(t)$.

$$P = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $B_\phi(t)$ est une base orthonormale, P est une matrice orthogonale réelle :

$$P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & \sin\phi(t) & 0 \\ -\sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\phi(t)} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & \sin\phi(t) & 0 \\ -\sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & G(\lambda-1) & 0 \\ G(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

$$A_{\phi(t)} = \begin{pmatrix} G(\lambda+1)\sin\phi(t) & G(\lambda-1)\cos\phi(t) & 0 \\ G(\lambda+1)\cos\phi(t) & -G(\lambda-1)\sin\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\phi(t)} = \begin{pmatrix} 2G\lambda\sin\phi(t)\cos\phi(t) & 2G\lambda\cos^2\phi(t) - G(1+\lambda) & 0 \\ 2G\lambda\cos^2\phi(t) + G(1-\lambda) & -2G\lambda\sin\phi(t)\cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. (c) Calcul de $a(\overrightarrow{f(t)})\cdot\overrightarrow{f(t)}$

La matrice de $a\big(\overrightarrow{f(t)}\big)$ dans la base $B_\phi(t)$ est :

$$\mathcal{M}_{B_\phi(t)}\big(a(\overrightarrow{f(t)})\big) = A_{\phi(t)} \times \mathcal{M}_{B_\phi(t)}\big(\overrightarrow{f(t)}\big)$$

$$\mathcal{M}_{B_\phi(t)}\big(a(\overrightarrow{f(t)})\big) = \begin{pmatrix} 2G\lambda\sin\phi(t)\cos\phi(t) & 2G\lambda\cos^2\phi(t) - G(1+\lambda) & 0 \\ 2G\lambda\cos^2\phi(t) + G(1-\lambda) & -2G\lambda\sin\phi(t)\cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta(t) \\ 0 \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{B_\phi(t)}\big(a(\overrightarrow{f(t)})\big) = \begin{pmatrix} 2G\lambda\sin\phi(t)\cos\phi(t)\sin\theta(t) \\ 2G\lambda\cos^2\phi(t)\sin\theta(t) + (1-\lambda)G\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit, en effectuant le calcul dans la base $B_\phi(t)$:

$$a\big(\overrightarrow{f(t)}\big)\cdot\overrightarrow{f(t)} = 2G\lambda\sin\phi(t)\cos\phi(t)\sin^2\theta(t)$$

3. (a) Système différentiel (S) satisfait par θ et ϕ

Dans la question 3 de la première partie, nous avons vu que :

$$\frac{d\overrightarrow{f}}{dt} = a(\overrightarrow{f}) - (a(\overrightarrow{f})\cdot\overrightarrow{f})\overrightarrow{f}$$

En exprimant les coordonnées des vecteurs des deux membres dans la base $B_\phi(t)$, nous en déduisons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta(t)\ \theta'(t) & = & 2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin\theta(t) - 2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin^3\ \theta(t) \\ \sin\theta(t)\ \phi'(t) & = & 2G\ \lambda\ \cos^2\phi(t)\ \sin\ \theta(t) +\ (1-\lambda)\ G\ \sin\theta(t) \\ -\sin\theta(t)\ \theta'(t) & = & -2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin^2\theta(t)\ \cos\theta(t) \end{array}\right.$$

que l'on peut écrire encore :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \cos\theta(t)\ \theta'(t) & = & 2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin\theta(t)\ \cos^2\theta(t) \\ \sin\theta(t)\ \theta'(t) & = & 2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin^2\theta(t)\ \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t)\ \phi'(t) & = & [2G\ \lambda\ \cos^2\phi(t) + (1-\lambda)\ G]\ \sin\theta(t) \end{array}\right.$$

Les deux premières équations sont équivalentes à :

$$\theta'(t) = 2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin\theta(t)\ \cos\theta(t)$$

donc le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \theta'(t) - 2G\ \lambda\ \sin\phi(t)\ \cos\phi(t)\ \sin\theta(t)\ \cos\theta(t) & = & 0 \\ \sin\theta(t)\ \big(\phi'(t) - [2G\ \lambda\ \cos^2\phi(t) + (1-\lambda)\ G]\big) & = & 0 \end{array}\right.$$

3. (b) Si $\overrightarrow{f_0}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne sont pas colinéaires, le système (S) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \phi' &= 2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) && (1) \\ \theta' &= 2G\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta && (2) \end{aligned}$$

Si $\overrightarrow{f_0}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne sont pas colinéaires, d'après la question 1. (b) de la troisième partie, $\overrightarrow{f(t)}$ et $\overrightarrow{e_3}$ ne le sont jamais, $\sin\theta(t) \neq 0$, et donc le système (S) est équivalent à :

$$\begin{aligned} \phi' &= 2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) && (1) \\ \theta' &= 2G\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta && (2) \end{aligned}$$

4. Intégration de (S) lorsque $\lambda = 0$ et trajectoire du point m

Lorsque $\lambda = 0$, le système (S) devient :

$$\begin{aligned} \phi' &= G && (3) \\ \theta' &= 0 && (4) \end{aligned}$$

et donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \phi(t) &=& G(t-t_0) \\ \theta(t) &=& \theta_0 \end{array} \right.$$

La trajectoire du point m tel que $\overrightarrow{Om(t)} = \overrightarrow{f(t)}$ est le cercle de la sphère unité de centre O, dont la distance zénithale est θ_0.

5. (a) Étude des solutions ϕ de (1) quand λ est non nul

$$2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) = G[2\lambda\cos^2\phi + 1 - \lambda] = G[(2\cos^2\phi - 1)\lambda + 1]$$

$$2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) = G\,[\lambda\cos(2\phi) + 1]$$

Donc toute solution ϕ de (1) est telle que :

$$(1 + |\lambda|)\,G \geq \phi'(t) \geq (1 - |\lambda|)\,G > 0$$

car $-1 < \lambda < 1$.
Donc ϕ est strictement croissante.
Donc pour tout $t > 0$,

$$\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t \phi'(s)ds \geq \int_0^t (1 - |\lambda|)\,G\,ds = (1 - |\lambda|)\,Gt$$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty}\phi = +\infty$.

De même pour tout $t < 0$,

$$\phi(t) - \phi(0) = -\int_t^0 \phi'(s)\ ds \leq -\int_t^0 (1-|\lambda|)\ G\ ds = (1-|\lambda|)\ Gt$$

On en déduit que $\lim\limits_{-\infty} \phi = -\infty$.
En résumé, sur $]-\infty, +\infty[$, ϕ est une fonction continue et strictement croissante telle que $\lim\limits_{+\infty} \phi = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \phi = -\infty$.
Donc ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5. (b) θ reste constant le long d'une courbe intégrale si et seulement si $\sin 2\theta_0 = 0$

D'après la question précédente, $\sin\phi\cos\phi$ n'est pas la fonction nulle. Pour que $\theta'(t)$ soit toujours nul, il faut et il suffit que $\sin\theta\cos\theta$ soit constamment nul, c'est-à-dire que $\sin 2\theta$ le soit. D'après les questions 1. (b), 1. (c) et 1. (d) de la troisième partie, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que ce soit le cas pour une valeur t_0.

5. (c) Intégration de (2) lorsque $\sin 2\theta_0 \neq 0$, à l'aide de (1)

De (1) et (2) nous tirons :

$$\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{2\lambda\cos^2\phi + 1 - \lambda}{2\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta}$$

soit :

$$\frac{2\ \lambda\ \sin\phi\ \cos\phi\ d\phi}{2\ \lambda\ \cos^2\phi + 1 - \lambda} = \frac{d\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

qui est à variables séparées :

$$-\frac{1}{2}\ln(2\ \lambda\ \cos^2\phi + 1 - \lambda) = \ln|\tan\theta| + C_1$$

qui équivaut à :

$$\tan\theta = \frac{C_2}{\sqrt{2\ \lambda\ \cos^2\phi + 1 - \lambda}}$$

Or :

$$2\ \lambda\ \cos^2\phi + 1 - \lambda = 2\ \lambda\ \cos^2\phi + (1-\lambda)(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$

$$2\ \lambda\ \cos^2\phi + 1 - \lambda = (\lambda+1)\cos^2\phi + (1-\lambda)\sin^2\phi = (1-\lambda)[\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi]$$

On obtient donc :

$$\tan\theta = \frac{C}{\sqrt{\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi}}$$

6. (a) $\phi_2 : t \mapsto \phi_1(t - t_1)$ est aussi une solution de (1)

Comme $\phi_2(t) = \phi_1(t - t_1)$,

$$\phi_2'(t) = \phi_1'(t - t_1) = 2G\lambda\cos^2\phi_1(t - t1) + G(1-\lambda) = 2G\lambda\cos^2\phi_2(t) + G(1-\lambda)$$

Donc ϕ_2 est solution de (1).

Propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$

Soit M_2 le point de $\mathcal{C}_2$ ayant pour abscisse t. Il a pour ordonnée $\phi_2(t) = \phi_1(t - t_1)$. Il est l'image par la translation de vecteur $t_1\overrightarrow{i}$ du point M_1 de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse $t - t_1$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ étant une base du plan, les t étant en abscisses, les $\phi(t)$ étant en ordonnées, la base étant supposée orthonormale.
Par suite, l'image par une translation de vecteur $t_1\overrightarrow{i}$, où t_1 décrit $\mathbb{R}$, de toute courbe intégrale de (1) est une autre courbe intégrale de (1).
Autrement dit, en revenant aux courbes intégrales, la transformée par une rotation d'axe Oz d'une courbe intégrale de $\mathcal{C}_\lambda$ est aussi une courbe intégrale de $\mathcal{C}_\lambda$.

6. (b) $\phi_3 : t \mapsto -\phi_1(-t)$ est aussi une solution de (1)

Comme $\phi_3(t) = -\phi_1(-t)$,

$$\phi_3'(t) = \phi_1'(-t) = 2G\lambda\cos^2\phi_1(-t) + G(1-\lambda) = 2G\lambda\cos^2(-\phi_3(t)) + G(1-\lambda)$$

Donc ϕ_3 est solution de (1).

Propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$

Soit M_3 le point de $\mathcal{C}_3$ ayant pour abscisse t. Il a pour ordonnée $\phi_3(t) = -\phi_1(-t)$. Il est l'image par la composée des symétries par rapport aux axes, du point M_1 de $\mathcal{C}_1$ d'abscisse $-t$, les t étant en abscisses, les $\phi(t)$ étant en ordonnées.
Par suite, l'image par la symétrie par rapport à l'origine de toute courbe intégrale de (1) est une autre courbe intégrale de (1).
Autrement dit, en revenant aux courbes intégrales, la transformée par une symétrie orthogonale par rapport au plan xOz d'une courbe intégrale de $\mathcal{C}_\lambda$ est aussi une courbe intégrale de $\mathcal{C}_\lambda$.

6. (c) $\phi_4 : t \mapsto \frac{\pi}{2} - \phi_1(-t)$ est solution de l'équation (1) associée au paramètre $-\lambda$

Comme $\phi_4(t) = \frac{\pi}{2} - \phi_1(-t)$,

$$\phi_4'(t) = \phi_1'(-t) = 2G\lambda\cos^2\phi_1(-t) + G(1-\lambda)$$

$$\phi_4'(t) = 2G\lambda\cos^2(\frac{\pi}{2} - \phi_4(t)) + G(1-\lambda)$$
$$\phi_4'(t) = 2G\lambda\sin^2\phi_4(t) + G(1-\lambda)$$
$$\phi_4'(t) = 2G\lambda(1-\cos^2\phi_4(t)) + G(1-\lambda)$$
$$\phi_4'(t) = 2G(-\lambda)\cos^2\phi_4(t) + G(1-(-\lambda))$$

Donc ϕ_4 est solution de l'équation (1) associée au paramètre $-\lambda$.

Relation entre $\mathcal{C}_\lambda$ et $\mathcal{C}_{-\lambda}$

On passe du point $(-t, \phi_1(-t))$ au point $(t, \phi_1(-t))$ par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
On passe du point $(t, \phi_1(-t))$ au point $(t, \frac{\pi}{2} - \phi_1(-t))$ par une symétrie par rapport à la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée $\frac{\pi}{4}$, donc on passe du point $(-t, \phi_1(-t))$ au point $(t, \phi_4(t))$ par une symétrie par rapport au point $I(0, \frac{\pi}{4})$.
Donc $\mathcal{C}_{-\lambda}$ se déduit de $\mathcal{C}_\lambda$ par une symétrie de centre I.

7. (a) et (b) Intégration de (1) sur $]t_k, t_{k+1}[$ par le changement de variable $u = \tan\phi$

$u = \tan\phi$, $du = \dfrac{d\phi}{\cos^2\phi}$, d'où $d\phi = \dfrac{du}{1+u^2}$,

$$\frac{du}{1+u^2} = \Big[\frac{2G\lambda}{1+u^2} + G(1-\lambda)\Big]dt$$

donc :

$$dt = \frac{du}{2G\lambda + G(1-\lambda)(1+u^2)}$$
$$dt = \frac{du}{G(1-\lambda)u^2 + G(1+\lambda)}$$
$$dt = \frac{1}{G(1-\lambda)}\ \frac{du}{u^2+r^2}$$
$$dt = \frac{1}{Gr(1-\lambda)}\ \frac{d(\frac{u}{r})}{(\frac{u}{r})^2+1}$$
$$t = \frac{1}{Gr(1-\lambda)}\mathrm{Arctan}(\frac{u}{r}) + \tau_k$$

τ_k est la valeur de t obtenue lorsque $u = 0$, c'est-à-dire lorsque $\tan\phi = 0$ et

$$\phi \in \Big]\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\Big[$$

donc lorsque $\phi = (k+1)\pi$.

7. (c) $\overrightarrow{f}$ est une fonction périodique

D'après la question 5. (a) de la troisième partie, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $\phi \mapsto u$ est périodique de période π :

$$\phi = (k+1)\pi + \text{Arctan}(u)$$

$$\frac{u}{r} = \tan\big(Gr(1-\lambda)(t-\tau_k)\big)$$

d'où

$$u = r\tan\big(Gr(1-\lambda)(t-\tau_k)\big)$$

et la fonction $t \mapsto u$ est périodique de période :

$$\frac{\pi}{Gr(1-\lambda)}$$

ce qui correspond à un accroissement de π pour ϕ.
La période T de $\overrightarrow{f}$ correspond à un accroissement de 2π de ϕ, donc :

$$T = \frac{2\pi}{Gr(1-\lambda)}.$$

Or

$$\frac{\pi}{G}(r+\frac{1}{r}) = \frac{\pi}{G}\frac{r^2+1}{r} = \frac{\pi}{G}\frac{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}+1}{r} = \frac{2\pi}{Gr(1-\lambda)}$$

et d'autre part :

$$\frac{2\pi}{Gr(1-\lambda)} = \frac{2\pi}{G\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}(1-\lambda)} = \frac{2\pi}{G\sqrt{1-\lambda^2}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{\pi}{G}(r+\frac{1}{r}) = \frac{2\pi}{\omega}$$