DURIN Jean-Pierre
Lot des Jaillots 71250 CLUNY
Tél: 03.85.59.16.48

Corrigé de l'épreuve Banque PT Maths II-B

Avertissement

Cette épreuve comporte malheureusement de nombreuses fautes de texte, ou maladresses d'écriture, en particulier dans les parties III et IV. Je les signalerai, le moment venu.

Partie I:

1) Notations:

Soit $m=(x_1,x_2,x_3)$ un élément de E, on appelle coordonnées sphériques de m le triplet $(r,\theta,\varphi)\in R_+^*\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$, tel que: $x_1=r\sin\theta\cos\varphi$, $x_2=r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3=r\cos\theta$.

Soient alors les vecteurs: $\overrightarrow{e_r}=\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_2}+\cos\theta\overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_\theta}=\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_1}+\cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_2}-\sin\theta\overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_\varphi}=-\sin\varphi\overrightarrow{e_1}+\cos\varphi\overrightarrow{e_2}$.

a) Pour montrer que $B=(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi})$ est une base orthonormée directe de R^3, je montre que la matrice P

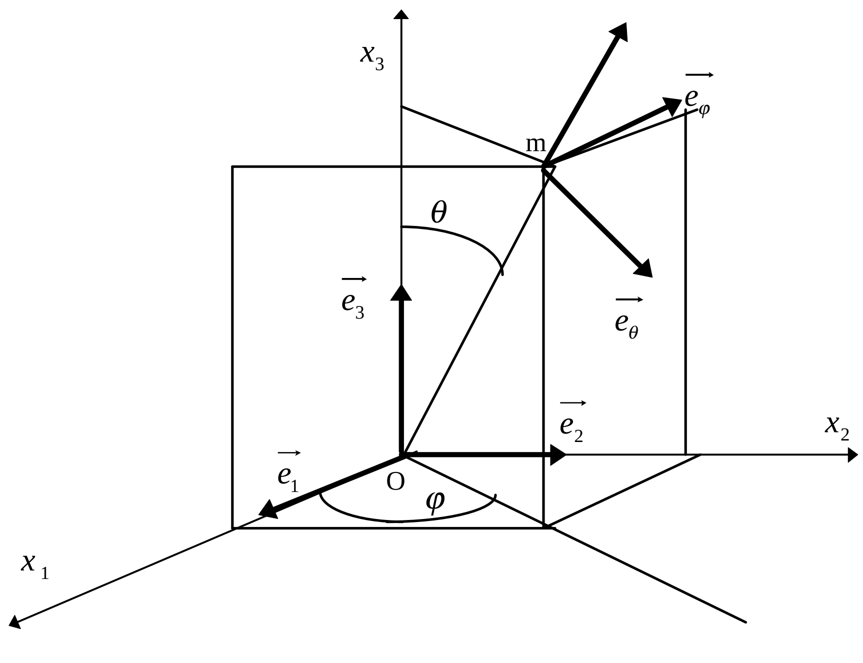
suivante appartient à $SO_3(R)$:

$$P=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

On vérifie bien que la norme de chaque vecteur colonne vaut 1, que les produits scalaires 2 à 2 sont bien nuls et que $\det(P)=1$. On aurait pu remplacer ces vérifications par:

$$<\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta}>=0,\quad \left\|\overrightarrow{e_r}\right\|=\left\|\overrightarrow{e_\theta}\right\|=1,\text{ et } \overrightarrow{e_\varphi}=e_r\wedge e_\theta.$$

b)



2) Soit f l'application de E dans lui-même définie par $\overrightarrow{Of(m)} = \dfrac{\rho(r)}{r}\overrightarrow{Om}$ avec $\rho \in \mathcal{F}^+$.

Soit une application de R dans $R_+^* \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$, de classe C^1 qui à t associe $(r(t),\theta(t),\varphi(t))$, $m(t)$ le point de coordonnées sphériques $(r(t),\theta(t),\varphi(t))$, et $M(t) = f(m(t))$.

a) • <u>Expression dans la base</u> B de $\overrightarrow{v(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt}$.

On a $\overrightarrow{Om(t)} = r(t)\overrightarrow{e_r}(t)$. D'où $\dfrac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt} = r'(t)\overrightarrow{e_r(t)} + r(t)\dfrac{d\overrightarrow{e_r(t)}}{dt}$. Or on a:

$$\frac{d\overrightarrow{e_r(t)}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}\theta'(t) + \frac{\partial\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}\varphi'(t) = \theta'(t)(\cos\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_2} - \sin\theta\overrightarrow{e_3})$$
$$+\varphi'(t)(-\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{e_2}).$$

$\dfrac{d\overrightarrow{e_r(t)}}{dt} = \theta'(t)\overrightarrow{e_\theta} + \varphi'(t)\sin\theta(t)\overrightarrow{e_\varphi}$ soit: $\overrightarrow{v(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt} = r'(t)\overrightarrow{e_r} + r(t)\theta'(t)\overrightarrow{e_\theta} + r(t)\varphi'(t)\sin\theta(t)\overrightarrow{e_\varphi}$

On a donc: $(v_1,v_2,v_3) = (r'(t), r(t)\theta'(t), r(t)\varphi'(t)\sin\theta(t))$.

• <u>Expression dans la base</u> B de $\overrightarrow{V(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$.

On a $\overrightarrow{OM(t)} = \dfrac{\rho(r(t)}{r(t)}r(t)\overrightarrow{e_r}(t) = \rho(r(t)\overrightarrow{e_r}$. soit

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \rho'(r(t))r'(t)\overrightarrow{e_r} + \rho(r(t))\theta'(t)\overrightarrow{e_\theta} + \rho(r(t))\varphi'(t)\sin\theta(t)\overrightarrow{e_\varphi}.$$

On a donc: $(V_1,V_2,V_3) = (\rho'(r(t))r'(t), \rho(r(t))\theta'(t), \rho(r(t))\varphi'(t)\sin\theta(t))$.

b) On constate que: $\begin{cases} V_1 = \rho'(r(t))v_1 \\ V_2 = \dfrac{\rho(r(t))}{r(t)}v_2 \\ V_3 = \dfrac{\rho(r(t))}{r(t)}v_3 \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho'(r(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\rho(r(t))}{r(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho(r(t))}{r(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et on a:

$\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ avec $J = Diag(\rho'(r(t)), \dfrac{\rho(r(t))}{r(t)}, \dfrac{\rho(r(t))}{r(t)})$ qui me paraît quand même dépendre un peu de l'application $t \mapsto (r(t),\theta(t),\varphi(t))$, puisqu'elle fait intervenir $r(t)$!..Disons que J aurait dû être notée $J(t)$ et que $J(t) = D(r(t))$ avec $D(u) = Diag(\rho'(u), \dfrac{\rho(u)}{u}, \dfrac{\rho(u)}{u})$ et c'est cette matrice $D(u)$ qui est indépendante de l'application $t \mapsto (r(t),\theta(t),\varphi(t))$.

---

3) $\det(J)=1$ se traduit par: $\dfrac{\rho'\rho^2}{r^2}=1$ soit: $\dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dr}(\rho^3)=r^2$. On en déduit $\rho^3(r)=r^3+K$.

Or pour que $\rho\in\mathcal{F}^+$, il faut que $\forall r\in R_+^*$, $r^3+K\in R_+^*$ ce qui nécessite $K\geq 0$. On posera donc $K=a^3$, avec $a\geq 0$. Conclusion: $\det(J)=1\Leftrightarrow\rho^3(r)=r^3+a^3$, avec $a\geq 0$.

---

4) Soit $\rho_a(r)=\sqrt[3]{r^3+a^3}$ et f_a l'application associée.

- Montrons que f_a est injective.

  Soit pour cela m et m' appartenant à E, tels que $f_a(m)=f_a(m')$. On a donc:

  $\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}\overrightarrow{Om}=\dfrac{\sqrt[3]{r'^3+a^3}}{r'}\overrightarrow{Om'}$ ce qui implique que $\overrightarrow{Om'}=\lambda\overrightarrow{Om}$ avec $\lambda>0$. Mais alors

  $r'=\lambda r$ et la relation précédente s'écrit: $\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}\overrightarrow{Om}=\dfrac{\sqrt[3]{\lambda^3r^3+a^3}}{\lambda r}\lambda\overrightarrow{Om}$ d'où

  $\sqrt[3]{r^3+a^3}=\sqrt[3]{\lambda^3r^3+a^3}$, soit $\lambda=1$ et donc $\overrightarrow{Om}=\overrightarrow{Om'}$, c'est à dire $m=m'$. cqfd.

- Surjectivité de f_a.

  Soit $M\in E$, $\overrightarrow{OM}=R\overrightarrow{e_r}$ (M de coordonnées sphériques (R,θ,φ)).

  On cherche si il existe un $m\in E$ tel que: $\overrightarrow{Om}=r\overrightarrow{e_r}$ et $f_a(m)=M$. Pour cela, il faut:

  $R\overrightarrow{e_r}=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}r\overrightarrow{e_r}$, soit $\sqrt[3]{r^3+a^3}=R$, c'est à dire $r^3=R^3-a^3$.

  Pour qu'un tel r soit strictement positif, il est donc nécessaire et suffisant que $R>a$, d'où la discussion:

  -- $a=0$ $r=R$ convient et f_0 est donc surjective. (Rq: f_0 est l'application identité)

  -- $a>0$ Seuls les points $M;R>a$ appartiennent à l'image de f_a. f_a n'est pas surjective, le sous ensemble de E qui n'est pas dans l'image de f_a est la boule fermée de centre O et de rayon a, privée de O.

- Prolongement éventuel par continuité de f_a au point O.

  Considérons les points m de coordonnées sphériques (r,θ,φ) où θ et φ sont fixés.

  $\lim\limits_{r\to 0}\overrightarrow{Of_a(m)}=\lim\limits_{r\to 0}\sqrt[3]{r^3+a^3}\,\overrightarrow{e_r}=a\overrightarrow{e_r}$. Mais le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ dépend de θ et φ et peut donc prendre toutes les directions quand on fait varier θ et φ.

  Conclusion: f_a ne se prolonge pas par continuité au point O.

Partie II:

Notations: l'application f de E dans lui même: $m(x_1,x_2,x_3)\mapsto M(X_1,X_2,X_3)$ est définie par:

$$\forall i\in\{1,2,3\},\quad X_i=\psi_i(r)x_i \quad \text{où } r=\left\|\overrightarrow{Om}\right\| \text{ et où les fonctions } \psi_i \text{ appartiennent à } \mathcal{F}^+.$$

1)

a) Matrice jacobienne de f.

Par définition $J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(\overrightarrow{Om}) & \frac{\partial}{\partial x_2}(\overrightarrow{Om}) & \frac{\partial}{\partial x_3}(\overrightarrow{Om}) \end{pmatrix}$ d'où on a:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \psi_1'(r)\frac{x_1^2}{r}+\psi_1(r) & \psi_1'(r)\frac{x_2 x_1}{r} & \psi_1'(r)\frac{x_3 x_1}{r} \\ \psi_2'(r)\frac{x_1 x_2}{r} & \psi_2'(r)\frac{x_2^2}{r}+\psi_2(r) & \psi_2'(r)\frac{x_3 x_2}{r} \\ \psi_3'(r)\frac{x_1 x_3}{r} & \psi_3'(r)\frac{x_2 x_3}{r} & \psi_3'(r)\frac{x_3^2}{r}+\psi_3(r) \end{pmatrix}$$

b) On rappelle que le caractère n linéaire alterné d'un déterminant fait que l'on ne modifie pas la valeur d'un
déterminant en ajoutant à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres. Ainsi

$$\det(\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_2}-\beta\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_3}-\gamma\overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_2}-\beta\overrightarrow{V_1}+\beta\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_3}-\gamma\overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_2},\alpha\overrightarrow{V_3}-\gamma\overrightarrow{V_1})$$
$$= \det(\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_2},\alpha\overrightarrow{V_3}-\gamma\overrightarrow{V_1}+\gamma\overrightarrow{V_1}) = \det(\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_2},\alpha\overrightarrow{V_3}) = \alpha^2\det(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3})$$

<u>Conclusion:</u> $\det(\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_2}-\beta\overrightarrow{V_1},\alpha\overrightarrow{V_3}-\gamma\overrightarrow{V_1}) = \alpha^2\det(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3})$

Soit alors $x_1 \neq 0$, dans $\det(J_0)$, remplaçons la 2ème colonne par: $x_1 \times (C_2) - x_2 \times (C_1)$ et la 3ème colonne par: $x_1 \times (C_3) - x_3 \times (C_1)$, on obtient:

$$x_1^2 \det(J_0) = \begin{vmatrix} \psi_1'(r)\frac{x_1^2}{r}+\psi_1(r) & -x_2\psi_1(r) & -x_3\psi_1(r) \\ \psi_2'(r)\frac{x_1 x_2}{r} & x_1\psi_2(r) & 0 \\ \psi_3'(r)\frac{x_1 x_3}{r} & 0 & x_1\psi_3(r) \end{vmatrix}$$ c'est à dire:

$$\det(J_0) = \frac{1}{x_1^2}\begin{vmatrix} \psi_1'(r)\frac{x_1^2}{r}+\psi_1(r) & -x_2\psi_1(r) & -x_3\psi_1(r) \\ \psi_2'(r)\frac{x_1 x_2}{r} & x_1\psi_2(r) & 0 \\ \psi_3'(r)\frac{x_1 x_3}{r} & 0 & x_1\psi_3(r) \end{vmatrix}$$ cqfd.

c) <u>Pour un point</u> m tel que $x_1 \neq 0$, on a donc:

$$\det(J_0) = \frac{1}{x_1^2}\left(\psi_3'(r)\frac{x_1 x_3}{r}x_1 x_3\psi_2(r)\psi_1(r) + x_1\psi_3(r)\left(\frac{x_1^3}{r}\psi_2(r)\psi_1'(r) + x_1\psi_2(r)\psi_1(r) + \frac{x_1 x_2^2}{r}\psi_2'(r)\psi_1(r)\right)\right)$$

soit:

$$\det(J_0) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{1}{r}\left(x_1^2\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + x_2^2\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r) + x_3^2\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)$$

<u>Pour un point</u> m tel que $x_1 = 0$, on revient à l'expression initiale:

$$\det(J_0)=\begin{vmatrix}\psi_1(r) & 0 & 0\\ 0 & \psi_2'(r)\dfrac{x_2^{\,2}}{r}+\psi_2(r) & \psi_2'(r)\dfrac{x_3x_2}{r}\\ 0 & \psi_3'(r)\dfrac{x_2x_3}{r} & \psi_3'(r)\dfrac{x_3^{\,2}}{r}+\psi_3(r)\end{vmatrix}$$ et on retrouve:

$\det(J_0)=\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\dfrac{1}{r}\left(x_2^{\,2}\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r)+x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)$, cette formule correspondant à la précédente en faisant directement $x_1=0$ dedans.

---

2) <u>Condition d'incompressibilité:</u> $\det(J_0)=1$.

<u>Conditions nécessaires:</u>

Ecrivons que $\det(J_0)=1$ dans les cas suivants: $x_1=0$ condition (α).

$x_2=0$ condition (β).

$x_3=0$ condition (γ).

$$(\alpha):\ \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\frac{1}{r}\left(x_2^{\,2}\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r)+x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)=1$$

$$(\beta):\ \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\frac{1}{r}\left(x_1^{\,2}\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)=1$$

$$(\gamma):\ \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\frac{1}{r}\left(x_1^{\,2}\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+x_2^{\,2}\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r)\right)=1$$

Mais alors, -- en faisant $(\gamma)-(\alpha)$ on obtient:

$\dfrac{1}{r}\left(x_1^{\,2}\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r)-x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)=0$ soit enfin en simplifiant par $\dfrac{\psi_2(r)}{r}\neq 0$ et en faisant $x_1=x_3=1$, $\psi_1'(r)\psi_3(r)-\psi_1(r)\psi_3'(r)=0$ c'est la condition (C_1).

-- en faisant $(\gamma)-(\alpha)$ on obtient:

$\dfrac{1}{r}\left(x_2^{\,2}\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r)-x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)=0$ soit enfin en simplifiant par $\dfrac{\psi_1(r)}{r}\neq 0$ et en faisant $x_2=x_3=1$, $\psi_2'(r)\psi_3(r)-\psi_2(r)\psi_3'(r)=0$ c'est la condition (C_2).

-- en écrivant enfin que $\det(J_0)=1$ pour $x_1=x_2=0$ et $x_3>0$ on obtient:

$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\dfrac{1}{r}x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)=1$ soit, puisque $\dfrac{x_3^{\,2}}{r}=r$ dans ce cas,

$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)=1$ c'est la condition (C_3).

<u>Conclusion:</u> (C_1), (C_2), (C_3) sont donc des conditions nécessaires pour que $\forall m\in E$, $\det(J_0)=1$.

<u>Montrons que ces conditions sont suffisantes.</u>

Supposons (C_1), (C_2), (C_3) vérifiées, alors:

$$\det(J_0)=\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\frac{1}{r}\left(x_1^{\,2}\psi_1'(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+x_2^{\,2}\psi_1(r)\psi_2'(r)\psi_3(r)+x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)$$

$$=\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+\frac{1}{r}\left(x_1^{\,2}\underbrace{\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)}_{\uparrow\, cf\,(C_1)}+x_2^{\,2}\underbrace{\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)}_{\uparrow\, cf\,(C_2)}+x_3^{\,2}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)\right)$$

$$\det(J_0) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + \frac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}{r}\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) \quad \text{soit:}$$

$$\det(J_0) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = 1$$

$$\uparrow cf\,(C_3)$$

---

3) On suppose (C_1), (C_2), (C_3) vérifiées.

a) <u>Existence de</u> λ <u>et</u> μ <u>strictement positifs tels que</u>: $\psi_1 = \lambda\psi_3$ <u>et</u> $\psi_2 = \mu\psi_3$.

$\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\psi_1}{\psi_3}\right)(r) = \dfrac{\psi_1'(r)\psi_3(r) - \psi_1(r)\psi_3'(r)}{\psi_3^{\ 2}(r)} = 0$ d'après (C_1). Donc sur l'intervalle $]0,+\infty[$, la fonction $\dfrac{\psi_1}{\psi_3}$ est dérivable, de dérivée nulle, elle est donc constante sur cet intervalle.

$$\exists\lambda > 0 \text{ tel que } \psi_1 = \lambda\psi_3.$$

Un raisonnement analogue avec $\dfrac{\psi_2}{\psi_3}$ et la condition (C_2), assure: $\exists\mu > 0$ tel que $\psi_2 = \mu\psi_3$.

b) Soit $Z(r) = \psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)$, alors $Z \in \mathcal{F}^+$ comme produit d'éléments de $\mathcal{F}^+$. On a alors:

$Z(r) = \lambda\mu\psi_3^{\ 3}(r)$ et la condition (C_3) s'écrit: $\lambda\mu\psi_3^{\ 3}(r) + r\lambda\mu\psi_3^{\ 2}(r)\psi_3'(r) = 1$.

Dès lors, calculons $rZ'(r) + 3Z(r)$. On a: $Z'(r) = 3\lambda\mu\psi_3^{\ 2}(r)\psi_3'(r)$ et par suite:

$rZ'(r) + 3Z(r) = 3\left(\lambda\mu\psi_3^{\ 3}(r) + r\lambda\mu\psi_3^{\ 2}(r)\psi_3'(r)\right) = 3$.

<u>Conclusion:</u> $rZ'(r) + 3Z(r) = 3$.

Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante égale à 1.

La solution générale de l'équation homogène est $\dfrac{K}{r^3}$, K constante réelle.

<u>Conclusion:</u> $Z(r) = 1 + \dfrac{K}{r^3}$ avec $K \geq 0$ pour que $Z \in \mathcal{F}^+$.

---

4) D'après **3)** ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont des éléments de $\mathcal{F}^+$ vérifiant (C_1), (C_2), (C_3) si et seulement si:

$\exists\lambda, \mu$ strictement positifs tels que: $\begin{cases} \psi_1 = \lambda\psi_3 \\ \psi_2 = \mu\psi_3 \end{cases}$ et $K \geq 0$ tel que $\lambda\mu\psi_3^{\ 3}(r) = 1 + \dfrac{K}{r^3}$.

D'où <u>des onditions nécessaires:</u>

On a donc $\psi_3^{\ 3}(r) = \dfrac{r^3 + K}{\lambda\mu r^3}$ ce qui permet d'écrire en posant $K = a^3$ avec $a \geq 0$:

-- $\psi_3(r) = \alpha_3 \dfrac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$ avec $\alpha_3 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda\mu}} > 0$.

-- $\psi_2(r) = \alpha_2 \dfrac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}$ avec $\alpha_2 = \mu\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda\mu}} > 0$.

-- $\psi_1(r)=\alpha_1\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$ avec $\alpha_1=\lambda\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda\mu}}>0$. Et on a bien $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$.

Réciproquement montrons que ces conditions sont suffisantes:

Supposons $\psi_1(r)=\alpha_1\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$, $\psi_2(r)=\alpha_2\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$, $\psi_3(r)=\alpha_3\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$,

avec les conditions: $\begin{cases}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0 \quad et \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=1\\ a\geq 0\end{cases}$ alors, ψ_1, ψ_2, ψ_3 sont des éléments de $\mathcal{F}^+$,

$\dfrac{\psi_1}{\psi_3}=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}=cte$ donc (C_1) est vérifiée, $\dfrac{\psi_2}{\psi_3}=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3}=cte$ donc (C_2) est vérifiée, et enfin

$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)=\frac{r^3+a^3}{r^3}+r\frac{(r^3+a^3)^{2/3}}{r^2}\frac{r^3(r^3+a^3)^{-2/3}-(r^3+a^3)^{1/3}}{r^2}$$

$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r)+r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r)=\frac{1}{r^3}(r^3+a^3+r^3-r^3-a^3)=1$$ donc (C_3) est vérifiée.

Retour sur la fonction f_a de la partie I.

On a $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}\overrightarrow{Om}$ d'où $X_1=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}x_1$, $X_2=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}x_2$, $X_3=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}x_3$

et on est donc dans le cas $\psi_1(r)=\psi_2(r)=\psi_3(r)=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$, et $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$.

Partie III:

Notation: On pose $\psi(r)=\dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$ où $a>0$.

Soit $c>0$, on définit $\psi_1=\dfrac{1}{c^2}\psi$, et $\psi_2=\psi_3=c\psi$.

1) Soit Σ l'image par f de la sphère unité $\left\{m; \left\|\overrightarrow{Om}\right\|=1\right\}$.

a) Equation cartésienne de Σ.

m de coordonnées cartésiennes (x_1,x_2,x_3) a sa coordonnée sphérique r égale à 1 et par conséquent a

pour image le point M de coordonnées cartésiennes (X_1,X_2,X_3) telles que:

$X_1=\dfrac{1}{c^2}\sqrt[3]{1+a^3}\,x_1$, $X_2=c\sqrt[3]{1+a^3}\,x_2$, $X_3=c\sqrt[3]{1+a^3}\,x_3$, et par suite:

$$\frac{X_1^{\ 2}}{(\frac{1}{c^2}\sqrt[3]{1+a^3})^2}+\frac{X_2^{\ 2}}{(c\sqrt[3]{1+a^3})^2}+\frac{X_3^{\ 2}}{(c\sqrt[3]{1+a^3})^2}=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=1$$ c'est à dire:

$$\frac{X_1^{\,2}}{(\frac{1}{c^2}\sqrt[3]{1+a^3})^2}+\frac{X_2^{\,2}+X_3^{\,2}}{(c\sqrt[3]{1+a^3})^2}=1$$ On reconnait l'ellipsoïde de révolution autour de l'axe $(O,\overrightarrow{e_1})$

de demis axes $\frac{1}{c^2}\sqrt[3]{1+a^3}$ et $c\sqrt[3]{1+a^3}$. $\begin{cases} c<1 & ellipsoïde \quad allongé \\ c>1 & ellipsoïde \quad aplati \\ c=1 & sphère \end{cases}$

b) <u>Attention ici, θ et φ n'ont plus la mëme signification qu'au I, ce qui est assez désagréable!</u>

On peut écrire l'équation cartésienne de Σ sous la forme:

$\frac{X_1^{\,2}}{(\frac{b}{c^2})^2}+\frac{\rho^2}{(cb)^2}=1$ avec $b=\psi(1)$ et $\rho^2=X_2^{\,2}+X_3^{\,2}$. On peut donc paramétrer la demie

méridienne par $\begin{cases} X_1=\frac{b}{c^2}\cos\varphi \\ \rho=cb\sin\varphi \end{cases}$ $\varphi\in[0,\pi]$ puis $\begin{cases} X_2=\rho\cos\theta=cb\sin\varphi\cos\theta \\ X_3=\rho\sin\theta=cb\sin\varphi\sin\theta \end{cases}$

$\theta\in[0,2\pi]$

et finalement:

$X_1=\frac{b}{c^2}\cos\varphi$, $X_2=cb\sin\varphi\cos\theta$, $X_3=cb\sin\varphi\sin\theta$, $\varphi\in[0,\pi]$, $\theta\in[0,2\pi]$ est bien une paramétrisation de Σ.

c) Avec les notations précédentes, le point m a pour coordonnées cartésiennes

$$(\cos\varphi,\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta).$$

Un vecteur normal en M à Σ est dirigé par exemple par $\frac{\partial\overrightarrow{0M}}{\partial\varphi}\wedge\frac{\partial\overrightarrow{0M}}{\partial\theta}$. On a:

$$\frac{\partial\overrightarrow{0M}}{\partial\varphi}\wedge\frac{\partial\overrightarrow{0M}}{\partial\theta}=\begin{pmatrix} -\frac{b}{c^2}\sin\varphi \\ bc\cos\varphi\cos\theta \\ bc\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ -bc\sin\varphi\sin\theta \\ bc\sin\varphi\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^2c^2\sin\varphi\cos\varphi \\ \frac{b^2}{c}\sin^2\varphi\cos\theta \\ \frac{b^2}{c}\sin^2\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$$ vecteur qui est

parallèle à $\begin{pmatrix} c^2\cos\varphi \\ \frac{1}{c}\sin\varphi\cos\theta \\ \frac{1}{c}\sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix}$ et qui a pour norme $b^2\sin\varphi\sqrt{c^4\cos^2\varphi+\frac{1}{c^2}\sin^2\varphi}$. Le produit scalaire de ce dernier vecteur avec $\overrightarrow{Om}$ est $c^2\cos^2\varphi+\frac{1}{c}\sin^2\varphi>0$. On prendra donc:

$$\overrightarrow{n(M)}=\frac{1}{\sqrt{c^4\cos^2\varphi+\frac{1}{c^2}\sin^2\varphi}}\begin{pmatrix} c^2\cos\varphi \\ \frac{1}{c}\sin\varphi\cos\theta \\ \frac{1}{c}\sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix}_{B_0}.$$

Rq: ce vecteur convient encore aux ‘sommets de l’ellipsoîde ‘, lorsque $\varphi = 0(\pi)$ car alors, le vecteur normal à Σ est bien parallèle au vecteur $\overrightarrow{e_1}$.

---

2) Soient t_1 et t_2 deux réels. On définit en tout point de Σ le vecteur (Interprétation de celui-ci???)
$\overrightarrow{g(M)} = \frac{t_2 - 2t_1}{3}(\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{e_1})\overrightarrow{e_1} + \frac{t_1 + t_2}{3}\left((\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{e_2})\overrightarrow{e_2} + (\overrightarrow{n(M)} \cdot \overrightarrow{e_3})\overrightarrow{e_3}\right)$ ainsi que:
$\overrightarrow{V_1(M)} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial c}$, et $\overrightarrow{V_2(M)} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial a}$ **NB:** Erreur d’énoncé, remplacer m par M sinon c’est ridicule!

a) On a: $\overrightarrow{V_1(M)} = -\frac{2b}{c^3}\cos\varphi\overrightarrow{e_1} + b\sin\varphi(\cos\theta\overrightarrow{e_2} + \sin\theta\overrightarrow{e_3})$.

$$\overrightarrow{V_2(M)} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{\cos\varphi}{c^2}\overrightarrow{e_1} + c\sin\varphi(\cos\theta\overrightarrow{e_2} + \sin\theta\overrightarrow{e_3})\right).$$

b) • $\overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} = \frac{1}{\sqrt{c^4\cos^2\varphi + \frac{1}{c^2}\sin^2\varphi}} \times A_1$ avec

$$A_1 = \frac{t_2 - 2t_1}{3}c^2\cos\varphi(-\frac{2b}{c^3}\cos\varphi) + \frac{t_1 + t_2}{3}\frac{b}{c}(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta)$$ soit encore

$$A_1 = \frac{b}{3c}\left(t_1(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + t_2(\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi)\right) = \frac{b}{3c}\left(t_1(3\cos^2\varphi + 1) + t_2(1 - 3\cos^2\varphi)\right)$$

On a donc: $\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{b}{3c}\left(t_1(3\cos^2\varphi + 1) + t_2(1 - 3\cos^2\varphi)\right)b^2\sin\varphi d\varphi d\theta$ soit

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_1(M)} d\sigma = \frac{2\pi b^3}{3c}\left(t_1(-\cos^3\varphi - \cos\varphi) + t_2(-\cos\varphi + \cos^3\varphi)\right)_0^\pi = \frac{2\pi b^3}{3c}4t_1 = \frac{8\pi b^3}{3c}t_1 .$$

• $\overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} = \frac{1}{\sqrt{c^4\cos^2\varphi + \frac{1}{c^2}\sin^2\varphi}} \times A_2$ avec

$$A_2 = \frac{t_2 - 2t_1}{3}c^2\cos\varphi(\frac{a^2}{b^2}\frac{\cos\varphi}{c^2}) + \frac{t_1 + t_2}{3}\frac{1}{c}\frac{ca^2}{b^2}(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta)$$ soit encore

$$A_2 = \frac{a^2}{3b^2}\left(t_1(\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi) + t_2\right) = \frac{a^2}{3b^2}\left(t_1(1 - 3\cos^2\varphi) + t_2\right)$$ et on a donc

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{a^2}{3b^2}\left(t_1(1 - 3\cos^2\varphi) + t_2\right)b^2\sin\varphi d\varphi d\theta$$ soit

$$\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)} \cdot \overrightarrow{V_2(M)} d\sigma = \frac{2\pi a^2}{3}\left(t_1(-\cos\varphi + \cos^3\varphi) - t_2\cos\varphi\right)_0^\pi = \frac{4\pi a^3}{3}t_2 .$$

---

3) Soit W l'application de $R_+^* \times R_+^*$ dans R définie par:

$$W(c,a) = \frac{4\pi}{3}(2c^2 + c^{-4})(1+2a^3)(1+a^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

a) **NB:** Il y a sûrement une erreur de texte ici, il faut lire $\frac{\partial W}{\partial c}(c,a)$ et non $\frac{\partial W}{\partial c}(a,c)$ et cette écriture me parait de toute façon plus correcte que celle du texte $\frac{\partial W(a,c)}{\partial c}$.

Même erreur pour $\frac{\partial W}{\partial a}(a,c)$ qu'il faut remplacer par $\frac{\partial W}{\partial a}(c,a)$. Bon!, sur ces bases on a donc:

$$\frac{\partial W}{\partial c}(c,a) = \frac{16\pi}{3}(c - c^{-5})(1+2a^3)(1+a^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{8\pi b^3}{3c}t_1$$ ce qui fournit: $t_1 = 2(c^2 - c^{-4})\frac{1+2a^3}{(1+a^3)^{\frac{4}{3}}}$.

$$\frac{\partial W}{\partial a}(c,a) = \frac{4\pi}{3}(2c^2 + c^{-4})\left(6a^2(1+a^3)^{-\frac{1}{3}} - a^2(1+a^3)^{-\frac{4}{3}}(1+2a^3)\right) = \frac{4\pi}{3}(2c^2 + c^{-4})a^2\frac{5+4a^3}{(1+a^3)^{\frac{4}{3}}}$$

On a donc $\frac{4\pi}{3}(2c^2 + c^{-4})a^2\frac{5+4a^3}{(1+a^3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{4\pi a^2}{3}t_2$ d'où $t_2 = (2c^2 + c^{-4})\frac{5+4a^3}{(1+a^3)^{\frac{4}{3}}}$.

b) **NB:** Je donne les deux limites demandées, mais je me demande, compte tenu de la question **4)**, s'il ne s'agissait pas plutôt d'étudier les limites de t_1 et t_2 quand $a \to 0$, car celles-ci correspondent aux expressions $x(c)$ et $y(c)$ de **4)**.

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{\partial W}{\partial c}(c,a) = \frac{16\pi}{3}(c - c^{-5})$ alors que $\lim\limits_{a\to 0} t_1 = 2(c^2 - c^{-4})$.

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{\partial W}{\partial a}(c,a) = 0$ alors que $\lim\limits_{a\to 0} t_2 = 5(2c^2 + c^{-4})$.

---

4) Soit la courbe C paramétrée par: $\begin{cases} x(c) = 2(c^2 - c^{-4}) \\ y(c) = 5(2c^2 + c^{-4}) \end{cases}$ avec $c \in R_+^*$.

a) On étudie les variations de x et y. On pourrait faire le changement de paramètre $t = c^2$ ce qui donne:

$\begin{cases} x(t) = 2(t - t^{-2}) \\ y(t) = 5(2t + t^{-2}) \end{cases}$ d'où: $\begin{cases} x'(t) = 2(1+2t^{-3}) > 0 \\ y'(t) = 5(2 - 2t^{-3}) = 10\frac{t^3 - 1}{t^3} \end{cases}$

Quand t croit de 0 à $+\infty$, x croit de $-\infty$ à $+\infty$, y décroit de $+\infty$ à 15 (pour $t = 1$), puis croit de 15 à $+\infty$. Ainsi C possède bien un point d'ordonnée minimale, c'est le point $(0{,}15)$.

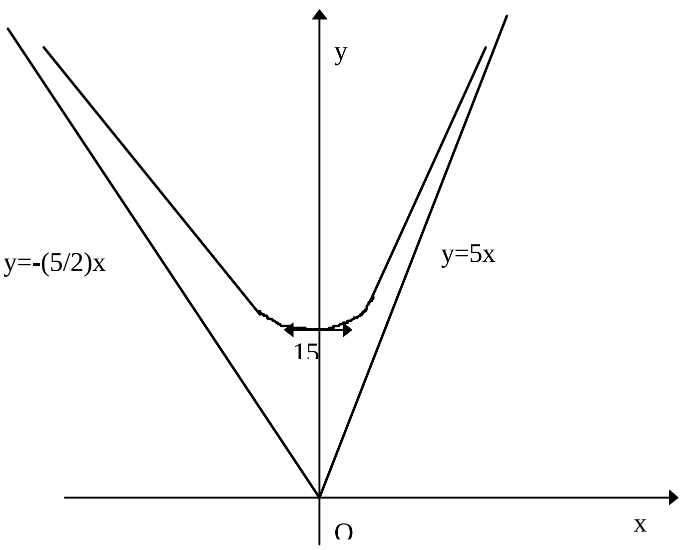
b) <u>Etude aux bornes:</u>

- Voisinage de $t = 0^+$, on a $\begin{cases} x(t) \approx -\frac{2}{t^2} \to -\infty \\ y(t) \approx \frac{5}{t^2} \to +\infty \end{cases}$, $\frac{y}{x} \to -\frac{5}{2}$, $y + \frac{5}{2}x = 15t \to 0^+$.

Il y a asymptote d'équation $y = -\frac{5}{2}x$, la courbe est au dessus de son asymptote.

• Voisinage de $t = +\infty$, on a $\begin{cases} x(t) \approx 2t \to +\infty \\ y(t) \approx 10t \to +\infty \end{cases}$, $\frac{y}{x} \to 5$, $y - 5x = \frac{15}{t^2} \to 0^+$.

Il y a asymptote d'équation $y = 5x$, la courbe est au dessus de son asymptote.



c) NB: La courbe C n'est pas une conique et n'est pas non plus incluse dans une conique comme semble insidieusement vouloir le dire l'énoncé. J'en donne plusieurs justifications.

Preuve n°1 On a vu, lors de l'étude des asymptotes que: $\begin{cases} y + \frac{5}{2}x = 15t \\ y - 5x = \frac{15}{t^2} \end{cases}$ et par conséquent C est

incluse dans la courbe d'équation cartésienne $(y + \frac{5}{2}x)^2 (y - 5x) = 15^3$, courbe algébrique du troisième degré d'équation développée: $y^3 - \frac{75}{4}yx^2 - \frac{125}{4}x^3 - 3375 = 0$, expression que je n'arrive pas à factoriser (Maple non plus) sous la forme (1er degré en x,y)(2ème degré en x,y)=0 pour espérer que C soit incluse dans une conique. Ce qui n'est pas encore très concluant, certes.

Preuve n°2 Dans le même ordre d'idée, on peut rechercher l'équation cartésienne de C de façon plus classique en éliminant t entre les deux polynomes $P = 2t^3 - xt^2 - 2$ et $Q = 10t^3 - yt^2 + 5$ puisque ceci traduit la condition sur (x, y) pour que $\exists t$ tel que $\begin{cases} x(t) = 2(t - t^{-2}) \\ y(t) = 5(2t + t^{-2}) \end{cases}$. Je ne détaille pas le calcul (abaissement du degré par exemple), mais j'utilise l'instruction de Maple, resultant(P,Q,t),

qui fournit le résultat suivant: $27000 - 8y^3 + 150yx^2 + 250x^3 = 0$ qui n'est rien d'autre que 8 fois

l'expression trouvée dans la preuve n°1.

Preuve n°3 Recherche d'une conique d'équation générale $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ qui voudrait bien contenir C. Pour cela il faut que:

$$4A(t^2 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^4}) + 25B(4t^2 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^4}) + 10C(-\frac{1}{t} + 2t^2 - \frac{1}{t^4}) + 2D(t - \frac{1}{t^2}) + 5E(2t + \frac{1}{t^2}) + F = 0$$

et ce $\forall t > 0$. On multiplie l'expression par t^4 et le premier membre, devenu un polynome en t de degré 6, doit être le polynome nul, ce qui conduit au système suivant:

$$\begin{cases} 4A + 100B + 20C = 0 \\ 2D + 10E = 0 \\ F = 0 \\ -8A + 100B - 10C = 0 \\ -2D + 5E = 0 \\ 4A + 25B - 10C = 0 \end{cases} \text{ soit: } \begin{cases} F = 0 \\ \begin{cases} D + 5E = 0 \\ -2D + 5E = 0 \end{cases} \Rightarrow D = E = 0 \\ \begin{cases} 4A + 100B + 20C = 0 \\ -8A + 100B - 10C = 0 \\ 4A + 25B - 10C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = C = 0 \end{cases}$$

Conclusion $A = B = C = D = E = F = 0$, ça ne fait pas une jolie conique!

Preuve n°4 Je fais un changement de repère en prenant les deux asymptotes pour nouveaux axes.

$y = 5x \to \vec{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $y = -\frac{5}{2}x \to \vec{J} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$ d'où

$P^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, et par suite on a $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 2(t - t^{-2}) \\ 5(2t + t^{-2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$, de sorte que

$XY = -\frac{2}{t}$ n'est pas constant, C n'est donc pas l'hyperbole tant espérée!... Dans le repère $(0, \vec{I}, \vec{J})$ non orthonormé certes, l'équation de C est $Y = -\frac{4}{X^2}$. **Rideau.**

Partie IV:

Notations: **NB:** On définit une nouvelle fonction W avec une notation déjà utilisée dans la Partie III, et ayant d'autres propriétés à priori. Donc ça continue dans la mauvaise qualité du sujet.

$W : R_+^* \times R_+^* \to R$ de classe C^2 notée: $(I_1, I_2) \mapsto W(I_1, I_2)$.

Soient trois fonctions $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ éléments de $\mathcal{F}^+$.

Venant de dire que $(I_1, I_2) \in R_+^* \times R_+^*$, il est navrant de poser $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ et $I_2 = \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2$ qui sont alors des fonctions. Nous sommes donc dans l'éternelle confusion entre fonction et valeur de la fonction en un point, ce qui fait que la définition de W_1 est vraiment très approximative!.

On aurait dû définir la fonction $W_1 : R_+^* \times R_+^* \times R_+^* \to R$ par la formule:

$W_1(u_1, u_2, u_3) = W(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, u_1^2u_3^2 + u_1^2u_2^2 + u_2^2u_3^2) = W(I_1, I_2)$ si on veut, en ayant posé $I_1 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ et $I_2 = u_1^2u_3^2 + u_1^2u_2^2 + u_2^2u_3^2$.

Pour $1 \le i \le 3$ on définit les fonctions s_i de R_+^* dans R par les formules:

$$s_i(R) = \lambda_i(R)\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_i}\left(\lambda_1(R),\lambda_2(R),\lambda_3(R)\right) - h(R)$$ où h est un élément de $\mathcal{F}$.

NB: Cette écriture est parmi les moins pires finalement de ce paragraphe de notations!

On a les conditions suivantes: $$\begin{cases} s'_1(R) + \dfrac{2}{R}(s_1(R) - s_2(R)) = 0 \\ s_2(R) = s_3(R) \\ s_1(a) = 0 \\ P(a) = s_1(b) \quad \rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3} \quad b = \rho_a(1) \end{cases}$$

1) On peut faire le shéma suivant:

$R_+^* \times R_+^* \times R_+^* \xrightarrow{I} R_+^* \times R_+^* \xrightarrow{W} R$ défini par

$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (I_1, I_2) = (u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}, u_1^{\,2} u_3^{\,2} + u_1^{\,2} u_2^{\,2} + u_2^{\,2} u_3^{\,2}) \mapsto W(I_1, I_2)$. de sorte que $W_1 = W \circ I$.

I est de classe C^2 de $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ vers $R_+^* \times R_+^*$ et W est de classe C^2 de $R_+^* \times R_+^*$ vers R, donc W_1 est de classe C^2 de $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ vers R, d'où $\dfrac{\partial W_1}{\partial u_i}$ est de classe C^1 de $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ vers R.

On a également: $R_+^* \xrightarrow{\lambda} R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ définie par $R \mapsto \left(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)\right)$ est une application de classe C^1 de R_+^* vers $R_+^* \times R_+^* \times R_+^*$ de sorte que $\dfrac{\partial W_1}{\partial u_i} \circ \lambda$ est de classe C^1 de R_+^* vers R, il en est par

suite de même des fonctions s_i.

Je reprends les notations du texte.

$$\frac{2}{R}\left(\lambda_2(R)\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}\left(\lambda_1(R),\lambda_2(R),\lambda_3(R)\right) - \lambda_1(R)\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}\left(\lambda_1(R),\lambda_2(R),\lambda_3(R)\right)\right) = \frac{2}{R}\left(s_2(R) - s_2(R)\right) = s'_1(R)$$

d'après la 1ère condition donnée. Par suite l'intégrale proposée s'écrit:

$$\int_a^b s'_1(R)dR = s_1(b) - s_1(a) = s_1(b) = P(a) \qquad \text{cqfd.}$$

---

2) Soit $r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}$, $\lambda_1 = \rho'_a(r)$ **NB:** là encore quelle ambiguïté! ρ_a ayant été défini plus haut au moyen de r il serait naturel de comprendre que $\lambda_1 = \dfrac{r^2}{(r^3 + a^3)^{\frac{2}{3}}}$ et bien pas du tout, il faut interpréter sous la forme $\lambda_1(R) = \rho'_a(\sqrt[3]{R^3 - a^3})$ et pour $\lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{\rho_a(r)}{r}$ idem! enfin pour $v = \dfrac{R}{r} = \dfrac{\rho_a(r)}{r}$ la remarque est la même...Moyennant quoi:

a) $\lambda_1(R) = \dfrac{(R^3 - a^3)^{\frac{2}{3}}}{(R^3)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{r^2}{R^2} = \dfrac{1}{v^2}$, on obtient ensuite $\lambda_2(R) = \lambda_3(R) = \dfrac{\sqrt[3]{R^3}}{r} = \dfrac{R}{r} = v$ puis

$$I_1(R) = \frac{1}{v^4} + 2v^2 \quad \text{et} \quad I_2(R) = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2} + v^4 = v^4 + \frac{2}{v^2}$$

Conclusion: $\mu_1(v)=\frac{1}{v^2}$, $\mu_2(v)=\mu_3(v)=v$, $J_1(v)=\frac{1}{v^4}+2v^2$, $J_2(v)=v^4+\frac{2}{v^2}$

On pose $\Phi(v)=W(J_1(v),J_2(v))=W_1(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))$.

Calcul de $\Phi'(v)$.

$$\Phi'(v)=\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_1}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\mu'_1(v)+\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\mu'_2(v)+\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_3}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\mu'_3(v$$

$$\Phi'(v)=-\frac{2}{v^2}\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_1}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))+\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))+\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_3}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v)) .$$

Or $\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}=\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1,I_2)(2\lambda_2)+\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1,I_2)(2\lambda_2)(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)$ et

$\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_3}=\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1,I_2)(2\lambda_3)+\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1,I_2)(2\lambda_3)(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2)$ et par suite quand on calcule au point

$(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))$, avec $\mu_2(v)=\mu_3(v)$, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))&=\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_3}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\\&=\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v),J_2(v))(2v)+\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v),J_2(v))(2v)(\frac{1}{v^4}+v^2)\end{aligned}$$

On a donc: $\Phi'(v)=-\frac{2}{v^2}\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_1}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))+2\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))$ soit:

$$\Phi'(v)=\frac{2}{v}\left(v\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))-\frac{1}{v^2}\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_1}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\right)\text{ soit enfin:}$$

$$\Phi'(v)=\frac{2}{v}\left(\mu_2(v)\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))-\mu_1(v)\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_1}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\right).$$

b) Dans l'intégrale donnant $P(a)$ au **1)**

posons: $v=\frac{R}{\sqrt[3]{R^3-a^3}}$ soit $R^3(v^3-1)=a^3v^3$ soit enfin $R=\frac{av}{\sqrt[3]{v^3-1}}$ on a:

$$dR=a\frac{\sqrt[3]{v^3-1}-v\frac{v^2}{(v^3-1)^{\frac{2}{3}}}}{(v^3-1)^{\frac{2}{3}}}dv=-\frac{a}{(v^3-1)^{\frac{4}{3}}}dv$$ (ce qui assure le caractère bijectif de $R(v)$).

Pour les bornes: $\begin{cases}R=a^+ & v=+\infty\\ R=b & v=\frac{b}{\sqrt[3]{b^3-a^3}}=\frac{b}{\sqrt[3]{1}}=b\end{cases}$ d'où:

$$P(a)=a\int_b^{+\infty}\frac{2\sqrt[3]{v^3-1}}{av}\left(\mu_2(v)\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_2}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))-\mu_1(v)\frac{\partial W_1}{\partial\lambda_1}(\mu_1(v),\mu_2(v),\mu_3(v))\right)\frac{1}{(v^3-1)^{\frac{4}{3}}}dv$$

Conclusion: $P(a)=\int_b^{+\infty}\frac{\Phi'(v)}{v^3-1}dv$.

c) Limite de $P(a)$ quand $a \to 0$.

On peut écrire d'une autre façon $\Phi'(v)$.

$$\Phi'(v) = \frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v))J'_1(v) + \frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))J'_2(v)$$

Soit: $\Phi'(v) = (-\frac{4}{v^5} + 4v)\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + (4v^3 - \frac{4}{v^3})\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))$

Soit encore: $\Phi'(v) = 4(v^3 - 1)(v^3 + 1)\left(\frac{1}{v^5}\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3}\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))\right)$ de sorte que:

$P(a) = 4\int_b^{+\infty}(v^3 + 1)\left(\frac{1}{v^5}\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3}\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))\right)dv$ et par suite:

$\lim\limits_{a \to 0} P(a) = 4\int_1^{+\infty}(v^3 + 1)\left(\frac{1}{v^5}\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) + \frac{1}{v^3}\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v))\right)dv$ si cette intégrale est bien convergente, et alors on a bien $P = 4I$.

---

3) On pose $W(I_1, I_2) = (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$ avec $(i, j) \in N^2$ $(i, j) \neq (0,0)$. On a:

$\frac{\partial W}{\partial I_1}(I_1, I_2) = i(I_1 - 3)^{i-1}(I_2 - 3)^j$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}(I_1, I_2) = j(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^{j-1}$ de sorte que:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(J_1(v), J_2(v)) = i(\frac{1}{v^4} + 2v^2 - 3)^{i-1}(v^4 + \frac{2}{v^2} - 3)^j = i\frac{(v^2 - 1)^{2i+2j-2}(2v^2 + 1)^{i-1}(v^2 + 2)^j}{v^{4i+2j-4}}.$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2}(J_1(v), J_2(v)) = j(\frac{1}{v^4} + 2v^2 - 3)^i (v^4 + \frac{2}{v^2} - 3)^{j-1} = j\frac{(v^2 - 1)^{2i+2j-2}(2v^2 + 1)^i (v^2 + 2)^{j-1}}{v^{4i+2j-2}}.$$

Donc si elle converge:

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{(v^2 - 1)^{2i+2j-2}(2v^2 + 1)^{i-1}(v^2 + 2)^{j-1}(v^3 + 1)\big(i(v^2 + 2) + j(2v^2 + 1)\big)}{v^{4i+2j+1}}dv.$$

Au voisinage de $+\infty$, la fonction à intégrer est équivalente à $\frac{2^{i-1}(i + 2j)}{v^{4-2(i+2j)}}$. L'intégrale est donc convergente

si $4 - 2(i + 2j) > 1$ soit $i + 2j < \frac{3}{2}$ le seul couple possible est donc: $(i, j) = (1,0)$.

Alors $I = \int_1^{+\infty}\frac{(v^3 + 1)(v^2 + 2)}{(v^2 + 2)v^5}dv = \int_1^{+\infty}\frac{v^3 + 1}{v^5}dv = \left(-\frac{1}{v} - \frac{1}{4v^4}\right)_1^{+\infty} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ d'où $P = 5$.

Fin.