Corrigé possible pour EDHEC ES 07[1]

Exercice 1

1) u_n est bien définie car l'intégrale converge en $+\infty$ (en effet $x^2 \times \dfrac{e^{-x}}{x+1/n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$)

2) a) $0 \leq w_n \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^{+\infty} = e^{-1}$.

b) $v_n \geq \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+1/n}dx = \dfrac{1}{e}\Big[\ln(x+\dfrac{1}{n})\Big]_0^1 = \dfrac{1}{e}\Big(\ln(1+\dfrac{1}{n}) - \ln\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$

Ainsi $u_n = v_n + w_n$ tend vers $+\infty$.

3) a) $\dfrac{1-e^{-x}}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc l'intégrale est faussement généralisée en 0 et converge donc bien.

b) $\dfrac{1-e^{-x}}{x+1/n} < \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ puis on intègre.

c) $0 < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1-e^{-x}}{x+1/n}dx = \ln(n+1) - v_n \leq I$ donc $\ln(n+1) - I \leq v_n \leq \ln(n+1)$.

d) On a $\ln(n+1) - I \leq u_n \leq \ln(n+1) + \dfrac{1}{e}$ donc $u_n \sim \ln(n+1)$.

Exercice 2

1) On montre facilement que la famille est libre puis en faisant remarquer que le cardinal de la famille est égal à la dimension de E (=4), on a une base de E.

2) a) On trouve $JK = L, KL = J, LJ = K$

b) On trouve $J^2 = K^2 = L^2 = -I$ et $KJKKL = -L, LK = LLJ = -J, JL = JJK = -K$

c) Tous els produits des éléments de E restent dans E (ainsi que les carrés).

3) $A^2 = (J+K)^2 = J^2 + K^2 + JK + KJ = -2I$.

Donc A est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}A$.

4) a) $\varphi_A : E \to E$ (car E stable par produit).

$\varphi_A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2)A^{-1} = \lambda AM_1A^{-1} + AM_2A^{-1} = \lambda\varphi_A(M_1) + \varphi_1(M_2)$.

Donc φ_A est bien un endomorphisme de E.

b) $M \in Ker\varphi_A \iff \varphi_A(M) = 0 \iff AMA^{-1} = 0 \iff M = 0$.

Donc φ_A est injective, comme φ_A est un endomorphisme en dimension finie, c'est un automorphisme de E.

5) a) $\phi = mat(\varphi_A, (I, J, K, L)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

car $\varphi_A(J) = K, \varphi_A(K) = J, \varphi_A(L) = -L$.

ϕ est symétrique donc φ_A est diagonalisable.

[1]email : hedi.joulak@gmail.com

b) $det(\phi-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda^2-1)^2$. Les valeurs propres sont donc -1 et 1 (toutes les 2 doubles).

$\phi X=-X \iff \begin{cases} x=-x \\ z=-y \\ y=-z \\ -t=-t \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$

Donc $E_{-1}=Vect\{(0,1,-1,0),(0,1,-1,1)\}$.

$\phi X=X \iff \begin{cases} x=-x \\ z=y \\ y=z \\ -t=t \end{cases}$

Donc $E_1=Vect\{(0,1,1,0),(1,1,1,0)\}$.

6) a) Come tr est linéaire, si on vérifie le résultat sur les éléments d'une base de E, on l'a pour tout élément de E.

Pour P ou $Q=I$ c'est évident.

Supposons $P,Q\in\{J,K,L\}$, ${}^tP-P$ et ${}^tQ=-Q$.

Donc $tr(PQ)=-tr({}^tPQ)=-tr({}^tQP)=tr(QP)$

b) $(\varphi_A(M),N)=(AMA^{-1},N)=tr({}^t(AMA^{-1})N)=tr(N^t(AMA^{-1})=tr({}^tNAMA^{-1})=(N,\varphi_A(M))$.

φ_A est bien symétrique.

c) $Ker(\varphi_A-Id)$ et $Ker(\varphi_A+Id)$ sont bien supplémentaires car φ_A est diagonalisable.

Soient $M\in Ker(\varphi_A-Id)$ et $N\in 8ker(\varphi_A+Id)$.

$(M,N)=(\varphi_A(M),N)=(M,\varphi_A(N))=(M,-N)=-(M,N)$ donc $(M,N)=0$.

Problème

Partie I

1) $P(A_{3k+1})=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3k}\dfrac{1}{n}$, $P(B_{3k+2})=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3k+1}\dfrac{1}{n}$, $P(C_{3k+3})=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3k+2}\dfrac{1}{n}$.

2) $P(A)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(A_{3k+1})=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3k}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}=\frac{n^2}{n^2+n+1}$

De même $P(B)=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n^2}{n^2+n+1}$ et $P(C)=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^2\times\dfrac{n^2}{n^2+n+1}$.

On a bien $P(A)>P(B)>P(C)$ ce qui était prévisible vu que A commence avant B qui commence avant C.

Partie II

1) $P(A_{3k+1})=\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\dfrac{n-3k}{n-3k+1}\times\dfrac{1}{n-3k}=\dfrac{1}{n}$.

De même pour $P(B)$ et $P(C)$.

2) a) $P(A)=\sum_{k=0}^{m}P(A_{3k})=\dfrac{m+1}{3m+1}$, $P(B)=\sum_{k=0}^{m-1}P(B_{3k+1})=\dfrac{m}{3m+1}$ (de même pour $P(C)$).
b) c) On adopte le même raisonnement qu'en 2)a) sauf qu'en b) pour A et B l'indice de sommation va de 0 à m et pour C il va de 0 à $m-1$; et dans c) pour les 3 on va de 0 à m.
3) Dans les 3 cas on tend vers un équilibre.

Partie III

1) a) $P_{(N=3m+1)}(A)=\dfrac{m+1}{3m+1}$, $P_{(N=3m+2)}(A)=\dfrac{m+1}{3m+2}$ et $P_{(N=3m+3)}(A)=\dfrac{1}{3}$ d'après la Partie II.
b) Avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{(N=3m+1),(N=3m+2),(N=3m+3)\}_{m=0}^{+\infty}$, on a :

$$P(A)=\sum_{m=0}^{+\infty}P_{(N=3m+1)}(A)P(N=3m+1)+P_{(N=3m+2)}(A)P(N=3m+2)+P_{N=3m+3)}(A)P(N=3m+3)$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+1}q^{3m}p+\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+2}q^{3m+1}p+\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{+\infty}q^{3m+2}p$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+1}q^{3m}p+\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m+1}{3m+2}q^{3m+1}p+\frac{pq^2}{3(1-q^3)}\text{ (somme infinie d'une suite géométrique)}$$

2) Raisonnement identique.
3) idem
5) a) On a $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}x^{3m}=\frac{1-x^{3n}}{1-x^3}$
b) $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}\frac{q^{3m+1}}{3m+1}=\sum_{m=0}^{n-1}\int_0^q x^{3m}dx=\int_0^q\frac{1-x^{3n}}{1-x^3}dx$
c) En faisant tendre n vers $+\infty$, $\displaystyle|\int_0^q\frac{x^{3n}}{1-x^3}dx|\leq q^{3n}\int_0^q|\frac{dx}{1-x^3}|\to 0$ d'où l'égalité.
6) Idem
7) a) On trouve $\dfrac{m+1}{3m+1}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3m+1}$ et $\dfrac{m+1}{3m+2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3m+2}$.
b) $\displaystyle P(A)=\frac{pq^2}{3(1-q^3)}+\sum_{m=0}^{+\infty}(\frac{1}{3}q^{3m+1}p+\frac{1/3}{3m+2}q^{3m+1}p)+\sum_{m=0}^{+\infty}(\frac{1}{3}q^{3m}p+\frac{2/3}{3m+1}q^{3m}p)$

$$=\frac{pq^2}{3(1-q^3)}+\frac{pq}{3(1-q^3)}+\frac{p}{3q}\int_0^q\frac{x}{1-x^3}dx+\frac{p}{3(1-q^3)}+\frac{2p}{3q}\int_0^q\frac{dx}{1-x^3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{p}{3q}\int_0^q\frac{2+x}{1-x^3}dx$$

8) On a $\dfrac{2+x}{1-x^3}\geq\dfrac{8}{7}(2+x)$ (après avoir encadré $1-x^3$ sur $[0,1/2]$)
D'où : $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{2+x}{1-x^3}dx\geq\frac{8}{7}\int_0^{1/2}(2+x)dx\geq\frac{8}{7}\int_0^{1/2}2dx=\frac{8}{7}\geq\frac{9}{8}$
Ainsi on a bien $P(A)\geq\dfrac{17}{24}$ (car $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\int_0^{1/2}\frac{2+x}{1-x^3}dx\geq\frac{17}{24}$).