

1 - Formules du prisme

a) Les lois de Snell - Descartes donnent à I et I' :

$$\begin{cases} \sin i = n \sin r \\ \sin i' = n \sin r' \end{cases}$$

b)  Des équivalences $\angle IBI'$, $A = i + \beta + \frac{\pi}{2}$ et donc $\beta = \pi - A$ Dans le triangle $II'B$: $r + i' + \pi - A = \pi$ et donc $A = r + i'$ Donc $D = D_I + D_{I'}$, déviation en I et I' :

$$D = D_I + D_{I'} = i - r + r' - i' = i - i' + r - r' = i - i' + A = A = n - 1$$



$$i' = i - D \quad ; \quad D = D_I + D_{I'} = i - r + r' - i' = i - i' + A = A = n - 1$$

$$\text{soit } D = i - i' - A$$

2. Conditions d'émergence

a) Il faut que le rayon en I' puisse sortir dans la condition la plus favorable

i.e. pour r' le plus petit et donc pour le plus grand obtenu pour $n = 1$. $r' = A - 1$ doit être inférieur à 1 sinon il y a réflexion totale.

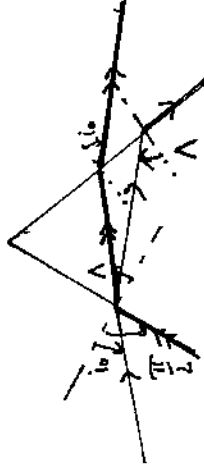
$$A - 1 < 1 \quad \text{soit } A < 2 \quad n = 2$$

b) On suppose ici que la condition du a) est respectée. On note i_0 l'angle le plus grand permettant de sortir en I' : $r' = 1$ et $n = A - 1$.

$$\text{On a donc } \sin i_0 = n \sin(A - 1) \text{ et donc } i_0 = \arcsin(n \sin(A - 1))$$

$$n_2 = n$$

c)



3) Minimum de déviation

a) La symétrie implique par rapport au plan bissecteur de l'angle A du prisme permet d'obtenir $i = i'$ dans les conditions de minimum de déviation.

$$\text{On a donc } n = n' = \frac{A}{2} \text{ et } i = i' = \arcsin(n \sin \frac{A}{2}) = \frac{D_{\min} + A}{2}$$

$$\text{b) Comme } \sin i = n \sin r, \quad n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin(\frac{D_{\min} + A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} = n$$

$$\text{c) } \frac{dn}{n} = \frac{(D_{\min} + A) \cos(\frac{D_{\min}}{2})}{2 \sin(\frac{D_{\min} + A}{2})} \cdot \frac{dA \cos(\frac{A}{2})}{2 \sin(\frac{A}{2})}$$

$$\text{et donc } \left| \frac{dn}{n} \right| = \frac{A D_{\min} \cos(\frac{D_{\min}}{2})}{2 \sin(\frac{D_{\min} + A}{2})} + \frac{A}{2} \left| \frac{\cos(\frac{A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})} - \frac{\cos(\frac{D_{\min}}{2})}{\sin(\frac{D_{\min} + A}{2})} \right|$$

4) Recherche de l'indice n

a) Mesure de A



Ad' représente la rotation permettant le passage d'un prisme à l'autre. Il s'agit donc de l'angle $\pi - A$ (on passe d'une face à l'autre).

$$\text{Or, } 2K + \alpha' + (R_1 - R_2) = 2\pi : \text{on a donc } 2\pi - 2A + (R_1 - R_2) = 2\pi$$

$$\text{soit } A = \frac{R_1 - R_2}{2} = 59^\circ 56'$$

$$\underline{2} : \Delta A = \frac{4R_1 + 4R_2}{2} = \Delta R : \text{la mesure est faite à 2 minutes d'arc près}$$

b) Mesure de $D_{\min}$

$\underline{1}$ - Pour repérer le minimum de déviation, on observe l'évolution de l'image de la fente, à l'œil nu puis à la lunette. On constate un rapprochement de celle-ci lors de la rotation du prisme. On utilise la méthode pour obtenir avec précision la position de l'image au minimum de déviation.

$$\underline{2} - D_{\min} = \frac{R_3 - R_4}{2} = 48^\circ 52'$$

c) Détermination de n

A.N. $n = 1,6295$

d) Incertitude relative sur n

$\Delta n = n \Delta D_n = \Delta A = \epsilon, \left(\frac{\Delta n}{n} = \frac{\epsilon}{2} \cot \alpha \right) : \Delta n = \frac{1}{2}$

$\frac{2 \cdot A \cdot N}{n} \Delta n = 5,0 \cdot 10^{-4}$

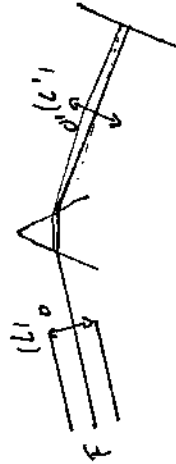
e. On a donc $n = (1,6295 \pm 0,0008)$

On peut aussi donner $n = (1,630 \pm 0,001)$

II) Le Spectrographe à prisme

1) Le spectrographe sert à obtenir une représentation graphique du spectre d'une lumière pour en réaliser l'analyse. Un spectroscopie permet la visualisation des des lignes, un spectromètre une mesure de λ .

2) Tracé de rayons lumineux



$\lambda_1 > \lambda_2 \rightarrow n_1 < n_2$: les rayons sont déviés par la prisme.

3) Variation de la déviation D_n

a) On a $n \sin \alpha \left(\frac{A}{2} \right) = \sin \left(\frac{A+D_n}{2} \right)$ que l'on dérive par rapport à n :

$\sin \left(\frac{A}{2} \right) = \cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{dD_n}{dn} : d'au \left(\frac{D_n}{dn} = \frac{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right)} \right)$

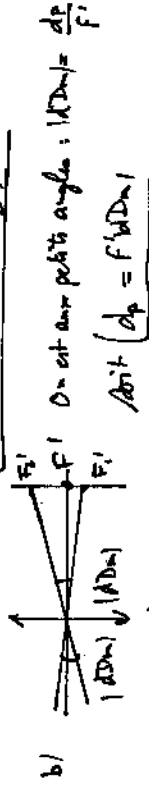
b) Or on a alors $\left(\frac{dD_n}{dn} = \frac{dn}{d\lambda} \right) : \left(\frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right)} \right)$

4) Doublet jaune du sodium

a) $\frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right)}$ et donc $dD_n = dn \frac{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right)}$

Avec $dn = -\frac{2 \cdot B}{\lambda^3} d\lambda$:

$dD_n = -\frac{4 \cdot B}{\lambda^3} \frac{\sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right)} d\lambda$



b) On est aux petits angles : $|D_n| = \frac{dD_n}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$

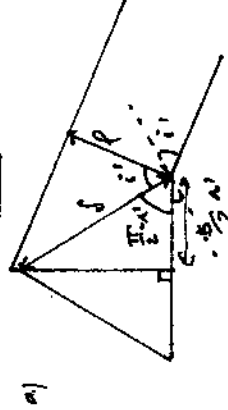
soit $(d_p = F' \cdot dD_n)$

$|D_n|$

c) $d_p = \frac{4 \cdot 10,610^{-3}}{0,5893^3} \frac{\sin(29^\circ 58')}{\cos(51^\circ 29')} \cdot 0,16 \cdot 10^{-3} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

$(d_p = 0,10 \text{ mm})$ c'est bien faible pour distinguer les 2 raies.

5) Pouvoir de résolution



On a $\frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$

Or $\sin \alpha = \cos \left(\frac{D_n}{2} - \alpha \right) = \frac{b}{2f}$

et $\cos \alpha = \frac{f}{s}$

On a donc $\left(\frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{b}{f} \right)$

et $(d_p = F' \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{b}{f} \cdot \Delta \lambda)$

On fait l'hypothèse d'un prisme de section isocèle rectangle.

b) $\frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{2 \sin \left(\frac{A}{2} \right)}{\cos \left(\frac{A+D_n}{2} \right)} : d_i = \frac{a}{f}$

Au minimum de déviation $d_i = d_i'$ à cause de la symétrie du prisme

On a donc $(a' = \frac{f'}{f} a)$ soit $5a$.

-2- Pour que les 2 images soient séparées, il faut que $a' < d_p$

(5)

-3- $a \frac{f'}{f} < f' \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{b}{\lambda} \frac{p}{\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda > \left[\frac{a \cdot f'}{f \cdot b \frac{d\lambda}{d\lambda}} \right] = \Delta\lambda_1$

-4- On ne peut agir, pour un matériel donné (A, b, p, dλ/dλ) que sur a : il faut minimiser a pour minimiser Δλ, et donc on peut penser pour donner la valeur Δλ. Cependant, en ce faisant, on se prive de luminosité, c'est-à-dire de la faculté d'observation, et on s'approche des conditions dans lesquelles la diffraction peut à sa fin limiter le dispositif.

-5- Sans l, on ne peut faire le calcul direct. On peut utiliser la géométrie ou se faire le calcul

$$2 \cdot \frac{b}{\lambda} = 2 \frac{a \cdot f'}{a \cdot \lambda} = \frac{a \cdot f'}{f \cdot \lambda} \Rightarrow \Delta\lambda_1 = \frac{a \cdot f'}{f \cdot \lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda} = \frac{a \cdot f'}{f \cdot \lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda}$$

$$= \frac{40 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{10}}{0,2 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^{10} = 12 \text{ nm}$$

$PR = 191$

On ne peut se priver de doubler la valeur de la condition...

c) Influence de la diffraction.

-1- La largeur angulaire de la figure de diffraction est $\frac{\lambda}{p}$ qui correspond à une f largeur sur l'image de $p = \frac{\lambda}{p} f'$

-2- Pour que l'observation soit possible, il faut $d\lambda > 2g$ du 1-2

-3- $2 \frac{\lambda}{p} f' < f' \frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{b}{\lambda} \frac{p}{\lambda} \Delta\lambda$ en procédant comme en b)

$$\Delta\lambda > \frac{2 \lambda}{b \frac{d\lambda}{d\lambda}} = \frac{2 \lambda^2}{b \cdot p}$$

-4- Pour limiter Δλ, on ne peut agir que sur b et dλ/dλ, λ étant inversé par la grande distance. b dépend de la taille du prisme et du spectroscope. Quand à dλ/dλ, il dépend du matériau qui doit être le plus dispersif possible.

-5- $\Delta\lambda_2 = \frac{2 \cdot (589,3 \cdot 10^{-3})^2}{2,35 \cdot 10^3 \cdot 10,6 \cdot 10^{-3}} = 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ nm} = 0,32 \text{ nm}$ $PR = 1840$

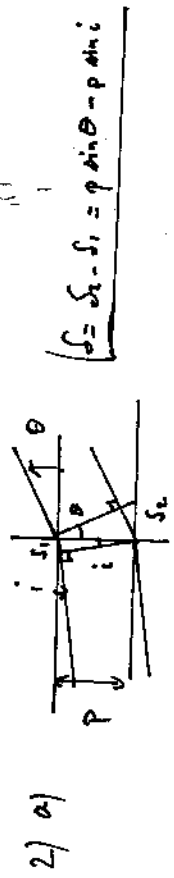
(6)

d) $PR < PR_2$: c'est la largeur à qui limite la résolution. le doublet du sodium est tel que $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm} < \Delta\lambda_1$

puisque $\Delta\lambda_{\text{prisme}} = 2,1 \text{ nm} > \Delta\lambda_1$ peut être résolu.

III - le réseau par transmission.

1) On a également des réseaux par réflexion (à échelle par exemple...) Un réseau permet d'obtenir des ordres plus nombreux dans différentes directions riges par les ordres de transmission : les réseaux sont transmis dans des directions étroites et distinctes.



b) On observe un maximum lorsque $d = k \lambda$ (rayon au phase)

soit $\sin \theta = \sin \theta_i + k \frac{\lambda}{p}$: formule des réseaux.

3) a) $\sin \theta_i = \frac{1}{2}$: $\sin \theta_k = 0,5 + k \frac{\lambda}{p}$ pour le violet $\frac{\lambda}{p} = \frac{0,4}{2} = 0,2$
pour le rouge $\frac{\lambda}{p} = \frac{0,7}{2} = 0,35$

Pour le violet, les sin θk permis (au 0,4 ∈ [-1; 1]) vont de -7 à +2

Pour le rouge, les ordres sont limités de -4 à +1

b) les deux conditions aux valeurs de sin θk suivantes :

ordre 2 [0,9; 1] (nul) } pas de recouvrement
ordre 1 [0,7; 0,85]
ordre 0 0,5

ordre -1 [0,15; 0,3] } il y a recouvrement des ordres 3 et -2
ordre -2 [-0,2; 0,10]
ordre -3 [-0,55; -0,10]

IV le spectrographe à réseau

1) Minimum de déviation.

a) $\frac{dD_n}{d\lambda} = \frac{d\theta_k}{d\lambda} - 1$ avec $m\theta_k = \sin i + k \frac{\lambda}{p}$

On a donc $\frac{d\theta_k}{d\lambda} \cos \theta_k = \cos i$

l'extremum est obtenu pour $\frac{d\theta_k}{d\lambda} = 1 = \frac{\cos i}{\cos \theta_k}$

$\rightarrow \cos i = \cos \theta_k$: $i = \theta_k$ ou $i = \pi - \theta_k$
 L'origine $i = \theta_k$ est la plus délicate à l'extremum.

b) On a donc $2 \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{p} = -2 \sin i$
 et $D_n = 2\theta_k = -2i$

ou encore $m\theta_k = -m \frac{D_n}{2} + k \frac{\lambda}{p}$

c) à l'ordre 1, on a donc $\sin i = -\frac{\lambda}{2p} = -0,165$
 $i = -9,31^\circ$ ($-8^\circ 15'$)

2) Dispersion angulaire, dispersion linéaire.

a) dériver la formule du réseau : $\frac{d\theta_k}{d\lambda} \cos \theta_k = 0 + \frac{\lambda}{p}$

On a donc $\frac{d\theta_k}{d\lambda} = \frac{k}{p \cos \theta_k}$

b) De même que précédemment $X = \theta' + i$ avec les conditions de base autour de θ_k .

On a donc $\left[\frac{dX}{d\lambda} = \theta' \frac{d\theta_k}{d\lambda} = \frac{k}{p \cos \theta_k} \right]$

c) A.N.: $\frac{dX}{d\lambda} = \frac{10^3}{2000 \cos \theta_1}$ avec $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{p} = \frac{518,05}{2000}$ ($\theta_1 = 16,6^\circ$)

$\left[\frac{dX}{d\lambda} = 0,52 \text{ mm/nm} \right]$

3) Résolution des doublets du sodium et du mercure dans les spectres d'ordre 1.

a) A.N.: $a' = \frac{f' a}{p} = 5,40 = 203 \mu\text{m} = 0,203 \text{ mm}$

b) $\Delta X_{Na} = \frac{dX}{d\lambda} \Delta \lambda = 0,31 \text{ mm}$

$\Delta X_{Hg} = \frac{dX}{d\lambda} \Delta \lambda = 1,10 \text{ mm}$

on peut $\frac{dX}{d\lambda}$ calculé en 2) car les λ sont proches.

Dans les 2 cas $\Delta X > a'$ pour la résolution des doublets. On voit qu'il n'est pas possible d'obtenir une résolution plus élevée que ce qui est en fait imposé par la géométrie du système.

Electrostatisme

I Le dipôle électrostatique

1) Doublet électrostatique - Moment électrique $\vec{p}$ d'un dipôle

$$a) \vec{p} = \sum q_i \vec{OS}_i = \left(\sum q_i \right) \vec{OO'} + \sum q_i \vec{O'S}_i = \sum q_i \vec{O'S}_i$$

La distribution de $\vec{p}$ est intrinsèque: indépendante des choix de l'origine.

$$b) \vec{p} = -q \vec{OS}_1 + q \vec{OS}_2 = q \vec{S_1S_2} = \vec{p}$$

c) 1- H porte 1 charge +e

F porte 3 charges +e et 10 charges -e

$$-2- \quad \|\vec{p}\| = e d = 1,6 \cdot 10^{-13} \cdot 0,92 \cdot 10^{-10} \left(\frac{1}{3} \cdot 10^{23} \right) = 4,42 \cdot 10^{-22}$$

$$-3- \quad \|\vec{p}\| = \|\sum q_i \vec{r}_i\| = -10e \cdot FG + e FH$$

$$\rightarrow FG = \frac{-10C}{10C} = -1$$

$$= \frac{4,42 \cdot 10^{22} \cdot 10^{-22}}{10 \cdot 10^{18}} = 5,4 \cdot 10^{-12} m = 5,4 pm$$

2) Potentiel scalaire électrostatique

$$a) V(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \text{pour superposition des potentiels}$$

$$b) r_1 = \left[(-OS_1 + OS_2)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = r^{-1} \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d \cos \theta}{2r} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \approx r^{-1} \left(1 - \frac{d \cos \theta}{2r} \right) \quad \text{pour } r \gg d \text{ et } d \ll r \text{ et } \cos \theta \ll \frac{r}{d}$$

$$\text{Le terme } r_1^{-1} = [(-OS_1 + OS_2)^2]^{-\frac{1}{2}} \approx r^{-1} \left(1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

$$\text{On a donc } V(r) \approx + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(-1 + \frac{d \cos \theta}{2r} + 1 + \frac{d \cos \theta}{2r} \right)$$

$$V(r) \approx \frac{q d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) = V(r)$$

3) Champ électrostatique $\vec{E}(r)$

$$a) \text{ grad}_H \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{3}{r^4} \text{ grad}(r) = -\frac{3}{r^4} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_x \quad (r = r \text{ indépendant de } \theta \text{ et } \varphi)$$

$$\left[= -\frac{3}{r^4} \vec{e}_r = -\frac{3}{r^3} \vec{r} \right]$$

$$\text{grad}_H(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \text{grad}(p \cos \theta) = \frac{\partial(p \cos \theta)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(p \cos \theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \vec{0} \\ = p \cos \theta \vec{e}_r + \frac{1}{r} p (-\sin \theta) \vec{e}_\theta$$

$$\text{Or, } \vec{r} = p(\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \Rightarrow \vec{e}_\theta = \frac{1}{p} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\text{On a donc } [\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r})] = \vec{p}$$

$$b) \vec{E} = -\text{grad} V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left((\vec{p} \cdot \vec{r}) \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{r}) \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{r}}{r^5} (\vec{p} \cdot \vec{r}) - \frac{1}{r^3} \vec{p} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \right], \quad k_1 = 3$$

$$c) V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et donc}$$

$$E_r = -\frac{\partial V \cos \theta / 4\pi\epsilon_0 r^2}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V(\cos \theta)}{\partial \varphi} = 0$$



$$\tan \beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$e) \text{ Si } \vec{E} \text{ est Annulé } \theta + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{On a donc } \tan \theta = 2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\text{Avec } \tan^2 \theta = 2 \quad \rightarrow \tan \theta = \sqrt{2} \quad \rightarrow \theta = 54,7^\circ = 0,955 \text{ rad}$$

4. Equipotentielles et lignes de champ

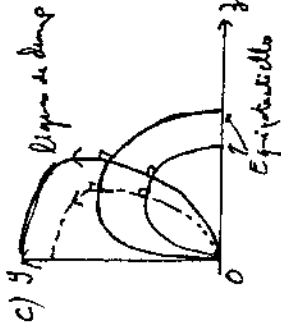
a) Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle $V(r) = \text{cte}$.
L'équation est donc $\cos \theta = \text{cte}$ soit $\boxed{r^2 = R^2 \cos^2 \theta}$ ici.

b) Une ligne de champ est une courbe tangente en tout point au champ $\vec{E}$.

$$\text{Ici } \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\cos \theta} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta$$

$$\ln(r) = 2 \ln(\sin \theta) + \text{cte} \quad \text{soit} \quad \boxed{r = r_0 \sin^2 \theta}$$



5. Action d'un champ électrique externe uniforme $\vec{E}_0$

a) $\vec{R}_f = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ (dans l'approximation)

$$\vec{p} = p \hat{1} \hat{E}$$

b) $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$ les équations sont obtenues pour U stationnaire: $\vec{p}$ dans la direction de $\vec{E}_0$. Il y a stabilité quand U est minimal: $\vec{p}$ dans la sens de $\vec{E}_0$ est instable sinon ($\vec{p}$ à l'opposé de $\vec{E}_0$).

$\vec{p}$ très petit on a les gains de champ de base (U minimal).

II Le dipôle magnétique

1) a) $\vec{M} = I \vec{S} = I \pi R^2 \vec{e}_z$

b) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}$ d'après la loi de Biot-Savart.

L'axe Oz est un axe de symétrie de révolution: $\vec{B}(M)$ est donc porté par cet axe (intersection d'une infinité de plans d'antisymétrie par la distribution).

On calcule alors $B_z(r)$, la composante axiale du champ:

$$B_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \sin \alpha}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int \sin^2 \alpha d\varphi$$

On a donc $B_z(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sin^2 \alpha \int d\varphi$

c) $B_z(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha d\varphi$ (expression de dS en sphériques)

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = 2\pi (1 - \cos \alpha)$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi (1 - \cos \alpha)) \vec{e}_z$$

$$= 2\pi \sin \alpha \frac{d\alpha}{d\varphi} \vec{e}_z$$

avec $\sin \alpha = \frac{R}{r}$ et $\cos \alpha = \frac{z}{r}$

et donc $\cos \alpha \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{R}{r^2} \frac{dz}{d\varphi}$

$= \cos \alpha \frac{dz}{d\varphi} = \frac{R}{r^2} \frac{dz}{d\varphi}$

On arrive bien alors pour $\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \vec{dl} \wedge \vec{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2\pi \sin^2 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi}{R} \vec{e}_z$

d) en 0, $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$

en $z \gg R$, $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{z} \right)^3 = \left[\frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \right]$

(5)

2. Potentiel vecteur magnétique

- a) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \times 10\vec{n}}{r^3}$ (hors programme).
- b) On a donc $A_2 = A_3 = 0$
 $A_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^2} \sin\theta$

3. Champ magnétique $\vec{B}(m)$

- a) $\vec{grad}(\frac{1}{r}) = -\frac{1}{r^2} \vec{grad}(r) = -\frac{\vec{r}}{r^2} = -\frac{\vec{O}M}{OM^2}$ $|A_2| = -1$
- b) $\text{div}_M(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{1}{OM} \text{div}_M(\vec{r}) + (\vec{grad}(\frac{1}{r})) \cdot \vec{r}$
 $= \text{div}_M(\frac{\vec{r}}{r}) = -\frac{\vec{r}}{OM^2} \cdot \vec{r} = -\frac{1}{OM^2}$
- $\vec{rot}_M(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{1}{OM} \vec{rot}_M(\vec{r}) + (\vec{grad}(\frac{1}{r})) \wedge \vec{r}$
 $= \vec{rot}_M(\frac{\vec{r}}{r}) = -\frac{1}{OM^2} \vec{r} \wedge \vec{r} = \vec{r} \wedge \frac{1}{OM^2} \vec{O}M$

$\Delta_M(\frac{\vec{r}}{r}) = \underbrace{\frac{1}{r}}_{=0} \vec{rot}_M(\vec{r}) + \vec{grad}(\frac{1}{r}) \cdot \vec{r} = 0$

- c) $\vec{B} = \vec{rot} \vec{A} = \vec{rot}(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r} \times 10\vec{n}}{r^3}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{rot}(\vec{rot}(\frac{\vec{r}}{r}))$ d'après ce qui précède.
- Or $\vec{rot}(\vec{rot}(\frac{\vec{r}}{r})) = \vec{grad}(\text{div}(\frac{\vec{r}}{r})) - \Delta(\frac{\vec{r}}{r}) = 0$
 $= \vec{grad}(-\frac{1}{OM^2})$

On a donc $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{grad}(\frac{1}{OM^2})$

- d) L'expression est semblable à $\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{grad}(\frac{1}{r})$. On transpose donc les résultats de I/3) c) avec $\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$ p $\rightarrow m$
- $B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos\theta}{r^3}$
 $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^3}$ $B_\phi = 0$

(6)

4. Action d'un champ magnétique externe $\vec{B}_e$

- a) $\vec{E}_p = -\vec{r} \cdot \vec{B}_e$
 $[\vec{F} = + \vec{grad}(\vec{r} \cdot \vec{B}_e)] = (\vec{r} \cdot \vec{grad}) \vec{B}_e$
- b) $\vec{B}_e = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_3$ et donc $E_p = + \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$
 $\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial z} (\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}) \vec{e}_3 = -\frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{(-\frac{3}{2}) 2z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \vec{e}_3$
 $\vec{F} = + \frac{3 \mu_0 I R^2}{2} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \vec{e}_3$
- c) On opère dans le référentiel de $\int_0^0 -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ pour avoir l'expression de W_0 :
 $W_0 = \int_0^0 \vec{F} \cdot d\vec{r}$
 $= W_0 = (E_p(0) - E_p(z_0)) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (\frac{1}{R^3} - \frac{1}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}})$
 $W_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} (1 - \frac{1}{(1 + \frac{z_0^2}{R^2})^{3/2}})$
- d) en $z_0 = 2\sqrt{2} R$, $(\frac{z_0}{R})^2 = 8$ et donc $\frac{1}{(1 + \frac{z_0^2}{R^2})^{3/2}} = \frac{1}{(9)^{3/2}} = \frac{1}{27}$
 On a donc $W_0 = \frac{\mu_0 I}{R} \frac{1}{54}$: $k_3 = \frac{1}{54}$

III. Le dipôle électrique oscillant.

- 1) Le dipôle oscille. Moment dipolaire $\vec{P}(t)$
 a) $\vec{P} = q_0 \cos(\omega t) a \vec{e}_3$ et donc $P_0 = q_0 a$.
 b) $\vec{E}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q_0 \omega \exp(j\omega t)$: $\vec{E} = q_0 \omega \vec{e}_3 = \frac{P_0 \omega}{a} \vec{e}_3$
- 2) Potentiels retardés ($\vec{A}(r,t); V(r,t)$)
 a) $\vec{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \frac{\vec{P}_0 \omega \exp(j\omega(t - \frac{r}{c}))}{r} d\vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{P_0 \omega \exp(j\omega(t - \frac{r}{c}))}{r}$
 $= \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{P_0 \omega \exp(j\omega(t - \frac{r}{c}))}{r}$

⑦

b) En projection on l'axe :

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \cos\theta \\ A_\theta &= \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) (-\sin\theta) \\ A_\phi &= 0 \end{aligned}$$

c) $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin\theta)$

$$= \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{r^2} \right) + \frac{-2 \sin\theta \cos\theta}{r^2 \sin\theta}$$

$$= -\frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \left(+1 + \frac{r\omega}{c} \right) \cos\theta$$

D'après la condition de Jauge de Lorenz, ceci vaut $-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$: on a l'équation pour l'équation au temps (division par $j\omega$ de l'ensemble) :

$$V(r) = +c^2 \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \cos\theta$$

Or, $C^2 \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0}$. On a donc :

$$V(r) = \frac{\rho_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \cos\theta : g(\theta) = \cos\theta$$

Si $\omega \rightarrow 0$, $V(r) \rightarrow \frac{\rho_0 \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$: on retrouve le potentiel électrostatique classique.

3) Champ électromagnétique $(\vec{E}(r,t); \vec{B}(r,t))$

a) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ comme on l'a déjà vu.

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) = 0 \\ B_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) = 0 \\ B_\phi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r} \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \sin\theta - \frac{1}{r} \left(-\sin\theta \right) \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \\ &= \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r^2} \sin\theta \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \end{aligned}$$

⑧

$$\text{Somit } \begin{cases} B_r = B_\theta = 0 \\ B_\phi = \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \end{cases}$$

Ai $\omega \rightarrow 0$ $\vec{B} \rightarrow \vec{0}$ (Electrostatique)

b) $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \phi &= -\frac{\rho_0}{4\pi \epsilon_0} \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{1}{r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \right) \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos\theta \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{1}{r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \right) \vec{e}_\theta + \vec{0} \\ &= -\frac{\rho_0 \exp(j\omega(t-\frac{r}{c}))}{4\pi \epsilon_0} \left(\cos\theta \left[\left(-\frac{2}{r^3} - \frac{j\omega}{r^2 c} \right) + \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \left(-\frac{1}{r} \right) \right] \vec{e}_r \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \left(\sin\theta \right) \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \vec{e}_\theta \right) \\ &= \frac{\rho_0 \exp(j\omega(t-\frac{r}{c}))}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left[\left(2 + \frac{j\omega r}{c} \right) + \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \frac{j\omega r}{c} \right] \vec{e}_r \cos\theta \\ &\quad + \sin\theta \left(1 + \frac{j\omega r}{c} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \left[\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\text{Donc } \vec{E} = \frac{\rho_0}{4\pi \epsilon_0 r^3} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \left[\left(2 + \frac{j\omega r}{c} \right) \cos\theta \vec{e}_r + \left(1 + \frac{j\omega r}{c} + \frac{j\omega r}{c} \right) \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

Pour $\omega \rightarrow 0$, on retrouve le champ électrostatique $\frac{\rho_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} (2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta)$

h. Rayonnement du dipôle à grande distance

a) si $r \gg \lambda$, $\frac{\omega r}{c} = 2\pi \frac{r}{\lambda} \gg 1$: on ne conserve que les termes de plus haut degré en $j\omega r$:

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{\mu_0 \rho_0 j \omega}{4\pi r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \sin\theta \quad B_r = B_\theta = 0 \\ \vec{E} &= E_\theta \vec{e}_\theta = \frac{\rho_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \left(\frac{j\omega r}{c} \right)^2 \sin\theta \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 \rho_0}{4\pi r} \frac{j\omega^2}{c} \exp(j\omega(t-\frac{r}{c})) \sin\theta \vec{e}_\theta \quad \vec{E}_r = \vec{E}_\theta = 0 \end{aligned}$$

3)

On a une structure locale d'onde plane avec $\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{E}$

($\vec{E}, \vec{B}, \vec{v}$ forme un trièdre direct).

$$b) \vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{\mu_0 \rho_0^2}{4\pi \lambda^2 c} \omega^4 \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) \sin^2 \theta \vec{e}_\theta$$

$$= \frac{\mu_0 \rho_0^2 \omega^4}{4\pi \lambda^2 c} \cos^2(\omega(t - \frac{z}{c})) \sin^2 \theta \vec{e}_\theta \quad \text{et } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$= \left(S = \rho_0^2 \frac{\pi^3 c^3}{\lambda^2 \lambda^2} \rho_0^2 \cos^2(\omega t - \frac{z}{c}) \sin^2 \theta \vec{e}_\theta \right)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \mu_0 \frac{2\pi^3 c^3 \rho_0^2}{\lambda^4 \lambda^2} \sin^2 \theta \vec{e}_\theta$$

$$c) P_m = \iint_{\text{surface}} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{S} = \mu_0 \frac{2\pi^3 c^3 \rho_0^2}{\lambda^4 \lambda^2} \iint \sin^2 \theta \vec{e}_\theta \cdot \vec{\lambda} \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \mu_0 \frac{2\pi^3 c^3 \rho_0^2}{\lambda^4} 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \mu_0 \frac{2\pi^3 c^3 \rho_0^2}{\lambda^4} 2\pi \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$P_m = \frac{16\pi^4 c^3 \rho_0^2 \mu_0}{\lambda^4}$$

$$1) P_m = \frac{16\pi^4 c^3 a^2 \rho_0^2}{\lambda^4 \omega^2} \vec{e}_\theta \quad \rho_0 = \frac{a \omega}{c} \quad d'après III a).$$

$$= \frac{16\pi^4 c^3 a^2 \omega^2 \mu_0}{\lambda^4 \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2}} = \frac{4\pi^2 c a^2 \omega^2 \mu_0}{\lambda^2} \quad R = \frac{8\pi^2 c a^2 \mu_0}{\lambda^2}$$

$$\text{On a donc } h_k = \frac{8\pi^2 c \mu_0}{c \lambda^2}$$