BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

OPTION : LETTRES & SCIENCES HUMAINES

MATHEMATIQUES
Programme ENS (B/L)

Vendredi 5 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve comprend deux problèmes indépendants

Problème 1

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n.

On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^m = 0$; le plus petit entier p tel que $M^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de M.

Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $[u, v]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit de même $[A, B] = AB - BA$.

La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant fixée, on note Φ_A l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $[A, M]$; ainsi :

$$\Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie 1

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et que A est la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des quatre matrices :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

3. a) Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible, d'inverse P^{-1} telles que $A = PDP^{-1}$. (On choisira pour P une matrice dont les termes de la première ligne sont tous les deux égaux à 1).

b) Déterminer P^{-1}.

4. Déterminer la matrice J de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. a) On pose $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $F_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathcal{B} = (A, F_1, F_2, F_3)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Donner la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$ et en déduire que Φ_A est diagonalisable.

Partie 2

On suppose toujours $n = 2$ et on pose $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels distincts. Dans cette partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant a et b comme valeurs propres, et on considère toujours l'endomorphisme Φ_A défini par $\Phi_A(M) = [A, M] = AM - MA$.

1. a) Justifier l'existence d'une matrice Q inversible telle que $A = Q\Delta Q^{-1}$.

b) Soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $N = QMQ^{-1}$. Montrer que $[A, N] = Q[\Delta, M]Q^{-1}$.

2. Pour tout entier i de $[\![1, 4]\!]$, on pose $K_i = QE_iQ^{-1}$, où (E_1, E_2, E_3, E_4) désigne toujours la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que (K_1, K_2, K_3, K_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Calculer, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, $[\Delta, E_i]$ en fonction de a, b et E_i.

c) Montrer que, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, K_i est vecteur propre de Φ_A.

d) En déduire que Φ_A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

3. a) Montrer que (K_1, K_4) est une base du noyau de Φ_A, noté $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$, et que (K_2, K_3) est une base de l'image de Φ_A, notée $\mathrm{Im}(\Phi_A)$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\Phi_A) \cap \mathrm{Im}(\Phi_A) = \{0\}$.

c) Vérifier que $I_2 \in \mathrm{Ker}(\Phi_A)$ et en déduire qu'il n'existe pas de matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $[A, M] = I_2$.

Partie 3

On revient dans cette partie au cas général où n est un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$, et on considère toujours l'endomorphisme Φ_A défini par $\Phi_A(M) = [A, M]$, où A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On s'intéresse aux matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\Phi_A(M) = M$.

1. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que si $\Phi_A(M) = M$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Phi_A(M^k) = kM^k$.

2. En déduire que si $\Phi_A(M) = M$, alors M est une matrice nilpotente et que son indice de nilpotence p est tel que $p \leqslant n^2$.

3. Soit toujours M telle que $\Phi_A(M) = M$ et p son indice de nilpotence.

a) On suppose que $p \neq 0$, et on considère une matrice X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $M^{p-1}X \neq (0)$, où (0) est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que la famille $(X, MX, M^2X, \ldots, M^{p-1}X)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) En déduire que l'on a $p \leqslant n$.

Partie 4

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $(a_{i,j})$, on définit la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$, par : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ (somme des éléments diagonaux de A).

1. a) Montrer que l'application qui, à toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

c) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

d) Montrer qu'on ne peut pas trouver deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $[A, B] = I_n$.

2. On considère dans cette question $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Soit f et d les deux endomorphismes de E tels que, pour tout polynôme R de E, on a : $f(R)(X) = XR(X)$ et $d(R)(X) = R'(X)$, où R' désigne le polynôme dérivé de R.

a) Calculer, pour tout R de E, $[d, f](R)$. Quel est l'endomorphisme $[d, f]$?

b) Ce résultat est-il en contradiction avec celui de la question 1 ?

Problème 2

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$; on note F la fonction de répartition de X.

On pose, pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x [1 - F(t)]\,dt - x[1 - F(x)]$.

2. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\,dt$ est convergente.

a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. En désignant par φ' la dérivée de φ, calculer pour tout x positif, $\varphi'(x)$, et en déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Justifier le fait que φ admet une limite finie en $+\infty$, et en déduire que X admet une espérance mathématique, que l'on notera $E(X)$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x[1 - F(x)] = 0$, et en déduire que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\,dt$.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1, et on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On définit la variable aléatoire S_n par :

$$S_n = \sup(X_1, \ldots, X_n). \text{ Ainsi, } \forall\, \omega \in \Omega, S_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Partie 1

1. a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.

b) En déduire que S_n est une variable aléatoire à densité, et déterminer une densité f_n de S_n.

2. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x [1 - F_n(t)]\,dt$ est convergente (on ne cherchera pas à calculer cette intégrale).

b) En déduire que S_n admet une espérance mathématique, notée $E(S_n)$.

Partie 2

L'objectif de cette partie est de trouver une expression simple de $E(S_n)$ par deux méthodes différentes, et de donner un équivalent de $E(S_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Première méthode

1. Montrer que $E(S_n) = \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$.

2. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 - (1 - x)^n}{x}\,dx$ et établir la relation :

$$E(S_n) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1 - (1 - x)^n}{x}\,dx.$$

3. Montrer que $E(S_n) = \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Deuxième méthode

On pose, pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $I_n(x) = \int_0^x F_n(t)\,dt$ et $J_n(x) = \int_0^x t f_n(t)\,dt$.

4. a) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}_+$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation de récurrence :

$$I_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{1}{\lambda} \times \frac{F_n(x)}{n}.$$

b) En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}_+$ et pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $I_n(x) = x - \frac{1}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k}$.

c) Pour tout x de $\mathbb{R}_+$ et tout n de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$ et de $I_n(x)$.

d) Déduire de ce qui précède que $E(S_n)$ existe, et retrouver l'expression obtenue dans la question 3. de cette partie.

5. a) Établir, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\ln n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.

c) En déduire un équivalent de $E(S_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

6. a) Montrer que la série de terme général $u_k = \frac{1}{k} + \ln k - \ln(k+1)$, pour k appartenant à $\mathbb{N}^*$, est convergente.

b) En déduire que la suite de terme général $E(S_n) - \frac{1}{\lambda} \ln n$, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, est convergente.