Concours communs polytechniques 2011-Filière MP- mathématiques 1

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{2x^n}{n^2-1}$.

Q1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

Q2. On note S la fonction somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R,R[$.

Q3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieurs et déterminer cette limite.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E); $2xy'-3y=\sqrt{x}$.

Q1. Résoudre (E) sur $]0,+\infty[$.

Q2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

PROBLÈME

AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE
Dans tout ce problème, on note :
-$\mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x>0$ réel, la fonction $t\longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$;
-F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tout f dans E, on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x>0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t.$$

Q1. **Questions préliminaire**

Soient $a\in\mathbb{R}$ et $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a,+\infty[$, on pose :

$$G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On considère les propositions suivantes :
(i) f est intégrable sur $[a,+\infty[$;
(ii) G admet une limite finie en $+\infty$.
Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :
(a) f est positive sur $[a,+\infty[$;
(b) f n'est pas positive sur $[a,+\infty[$.

Partie I : Exemples et propriétés

Q2. a/ Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$.

b/ Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c/ Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+_*,\mathbb{R})$, espace vectoriel des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Q3. **a/** On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.

b/ Soit $\lambda \geqslant 0$ réel. on considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \geqslant 0$ par : $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$. Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.

Q4. Soient f dans E et n dans $\mathbb{N}$. On considère $g_n : t \longmapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leqslant e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geqslant A$.
En déduire que g_n est un élément de E.

Q5. **Transformée de Laplace d'une dérivée**

Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \ \ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Q6. Régularité d'une transformée de Laplace

a/ Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question **4.**

b/ Démontrer que pour tout f dans E, la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

Partie II : Comportements asymptotiques de la transformée de Laplace

Dans toute cette partie, f est un élément de E

Q7. On suppose dans cette question que f est dans F.

a/ Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

b/ *Théorème de la valeur initiale*
On suppose, de plus, que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec f' bornée sue $\mathbb{R}^+$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

Q8. *Théorème de la valeur finale*
On suppose dans cette question que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

a/ Démontrer que f appartient à F.

b/ Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x) dx$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\dfrac{x}{a_n}\right)$.

c/ En déduire à l'aide du théorème de la convergence dominée, que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

d/ Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

Q9. Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on pose $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

a/ Démontrer que R est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer R'.
En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

b/ On fixe $\varepsilon > 0$.
Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geqslant A$, on ait $|R(t)| \leqslant \varepsilon$.
En déduire que, pour tout $x > 0$, on a : $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x \displaystyle\int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$

c/ Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

Partie III : Application

Q10. **Calcul de l'intégrale de Direchlet**

Ici f la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

a/ Démontrer que la fonction $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) dt$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

b/ En considérant la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)|\mathrm{d}t$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

c/ Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{1+x^2}(\mathrm{e}^{-xX}(x\sin X + \cos X) - 1).$$

Démontrer que la fonction $t \longmapsto (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} (\sin t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

d/ Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ.
Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant(La démarche de la preuve étant identique à celle de la question **9)**) :

Lorsque f dans E vérifie $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x \to 0} \mathcal{L}(f)(x)$.

On notera que, par rapport à la question **9)**, on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbb{R}^+$ par l'hypothèse $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$.

Fin de l'énoncé

sadikoulmeki@yahoo.fr