ecricome

CONCOURS D'ADMISSION 2011

12

# Mathématiques

Option ULM BL

**Jeudi 21 avril 2011 de 14h00 à 17h00**

**Durée : 3 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":*
*14h00 – 18h00*

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages.

***Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.***

*Tournez la page s.v.p.*

ecricome

# PROBLEME.

Soit $f_n$ l'application définie sur l'ensemble $\mathsf{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$, à coefficients réels par la relation :

$$f_n(P) = Q$$
$$\text{avec } Q(X) = \frac{1}{2}[P(X+1) + P(X)].$$

1. Montrer que $f_n$ est un endomorphisme de $\mathsf{R}_n[X]$.
2. Soient $P$ un élément du noyau de $f_n$ et $S$ et $T$ les polynômes définis par :
$$S(X) = P(X) - P(0), T(X) = P(X) + P(0).$$
   a. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel $n$,
$$P(n) = (-1)^n P(0)$$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel $k$,
$$S(2k) = 0, T(2k+1) = 0.$$
   c. En déduire que le noyau de $f_n$ est réduit au vecteur nul et que $f_n$ est un automorphisme de $\mathsf{R}_n[X]$.
3. Soit $(E_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la famille de polynômes définie par :
$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\} \qquad E_k = f_n^{-1}(X^k).$$
   a. Justifier que la famille $(E_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathsf{R}_n[X]$.
   b. Prouver que :
      i. $\forall k \in \{0,1,\dots,n\} \qquad E_k(X+1) + E_k(X) = 2X^k.$
      ii. $E_0 = 1.$
      iii. Pour tout $k$ de $\{1,2,\dots,n\}$ $E_k$ est de degré $k$ et que $E_k(1) + E_k(0) = 0.$
      iv. Pour tout $k$ de $\{1,2,\dots,n\}$ le polynôme dérivé $E_k'$ de $E_k$ vérifie : $E_k' = k\,E_{k-1}.$
   c. Calculer explicitement les polynômes $E_1, E_2, E_3$, puis donner les valeurs de $E_1(0), E_2(0), E_3(0)$.
4. Montrer que :
$$\forall k \in \{0,1,\dots,n\} \qquad E_k(1-X) = (-1)^k E_k(X).$$
   En déduire que pour tout entier naturel $p$ non nul :
$$E_{2p}(0) = E_{2p}(1) = E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$
5. Utilisez la formule de Taylor pour prouver que :
$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0) X^{n-k}.$$
6. En déduire l'expression explicite du polynôme $E_4$.
7. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul :
$$E_n(0) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E_k(0)$$
8. Donner l'expression explicite du polynôme $E_5$.

ecricome

# PROBLEME.

## Indice de concentration d'une variable discrète.

Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète positive, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, B, p)$, de fonction de répartition $F_X$, admettant une espérance $E(X)$ non nulle, d'univers image $X(\Omega) = \{x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$, $n$ étant un entier naturel non nul.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(Ou, Ov)$, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on note $M_i$ les points de coordonnées $(u_i, v_i)$ tels que

$$\begin{cases} u_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} p[X = x_k] = F_X(x_i) \\ v_i = \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\sum_{k=1}^{i} x_k p[X = x_k] \end{cases}$$

On appelle courbe de *Gini* de $X$, la ligne polygonale obtenue en joignant les points $O, M_1, M_2, \ldots, M_n$ et on appelle *Indice de concentration* le réel $I(X)$ égal à deux fois l'aire de la portion de plan comprise entre la diagonale du carré unité et la courbe de *Gini*.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule :

$$\text{Aire du trapèze} = \frac{(\text{Grande base} + \text{Petite base}).\text{hauteur}}{2}.$$

1. On suppose que $X$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $p$.
   a. Représenter la courbe de Gini de $X$.
   b. Montrer que son indice de concentration est égal à $1 - p$.
   c. Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi de Bernouilli que $X$.
      i. Donner la loi de la variable $|X_1 - X_2|$.
      ii. Montrer que :
$$I(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}$$
2. On suppose maintenant que $X$ suit une loi uniforme d'univers image $X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, n\}$.
   a. Démontrer par récurrence que :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
   b. Exprimer, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, les réels $u_i$ et $v_i$ en fonction de $i$ et de $n$.
   c. Vérifier que pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n - 1$ :
$$v_{i+1} + v_i = \frac{2(i+1)^2}{n(n+1)}.$$
   d. En déduire que l'*Indice de concentration* de $X$ est égal à :
$$I(X) = \frac{n-1}{3n}.$$
   e. Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires, indépendantes, suivant la même loi uniforme que $X$.
      i. Donner la loi de la variable $|X_1 - X_2|$.
      ii. Montrer que :
$$I(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)}.$$

Tournez la page s.v.p.

# Indice de concentration d'une variable exponentielle.

Soit $X$ une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité $f$. On note $F_X^{-1}$ l'application réciproque de la restriction de la fonction de répartition $F_X$ de $X$ aux réels positifs ou nuls.

On définit les fonctions $Q_X$ et $h_X$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,+\infty[ \qquad Q_X(x) = \dfrac{1}{E(X)} \displaystyle\int_0^x tf(t)dt \\ \forall x \in [0,1[ \qquad h_X(x) = Q_X(F_X^{-1}(x)) \end{cases}$$

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition de $X$.
2. Justifier l'existence de $F_X^{-1}$ et montrer que :

$$\forall x \in [0,1[, \qquad F_X^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x).$$

3. Exprimer $Q_X(x)$ en fonction du réel $x \geqslant 0$.
4. En déduire l'expression de $h_X$ en fonction du réel $x$.
5. Montrer que l'on peut prolonger $h_X$ par continuité en 1. Le prolongement est-il dérivable en 1 ? Que dire de la demi-tangente à la représentation graphique de $h_X$ au point 1.
6. Calculer la dérivée de $h_X$ sur l'intervalle $[0,1[$. Dresser le tableau de variation de $h_X$.
7. Montrer que $h_X$ est convexe sur $[0,1[$.
8. On appelle courbe de *Gini* de $X$, la représentation graphique de $h_X$ relativement à un repère orthonormé $(Ox,Oy)$. Donner son allure.
9. On appelle *Indice de concentration* de $X$, le réel $I(X)$ égal à deux fois l'aire de la portion de plan comprise entre la diagonale du carré unité et la courbe de *Gini*.
   a. Calculer $I(X)$.
   b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} Q_X(x)f(x)dx$ est convergente et que :

$$I(X) = 1 - 2\int_0^{+\infty} Q_X(x)f(x)dx.$$