

## 1. EXERCICE.

Soit  $a$  un réel strictement positif. On considère la fonction  $f_a$  définie pour tout réel  $t$  strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombre réels déterminée par son premier terme  $u_0 > 0$  et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

### 1.1. Etude des variations de la fonction $f_a$ .

1. Déterminer la limite de  $f_a(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et donner la position de la courbe représentative de  $f_a$  par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de  $f_a(t)$  lorsque  $t$  tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de  $f_a$  sur  $\mathbb{R}^{*+}$  et dresser le tableau de variation de  $f_a$ .
4. En déduire que :

$$\forall t > 0 \quad f_a(t) \geq a$$

### 1.2. Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Que dire de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans le cas particulier où  $u_0 = a$ ?
2. Dans la suite on revient au cas général  $u_0 > 0$ .  
Démontrer que :

$$\forall t > a \quad 0 < f'_a(t) < \frac{1}{2}$$

3. Montrer que pour tout entier  $n$ , non nul :

$$u_n \geq a$$

4. Prouver alors que pour tout entier  $n$  non nul :

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

5. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$  et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite  $(u_n)$ , de premier terme 1, convergeant vers  $\sqrt{2}$ .

### 1.3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , la fonction  $g$  définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que  $g$  admet un extremum local sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  dont on précisera la nature.
3. Vérifier que :

$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

4. En déduire que l'extremum local est un extremum global de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

## 2. EXERCICE.

$M_2(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice  $A$  suivante étant donnée

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

on définit l'application  $\phi_A$  par :

$$\begin{aligned} \phi_A : M_2(\mathbb{R}) &\rightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \phi_A(M) = AM - MA \end{aligned}$$

## 2.1. Diagonalisation de $A$ .

1. Vérifier que  $A^2 = A$ . En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .
2. Prouver que la matrice  $A$  est diagonalisable et déterminer une matrice  $P$  inversible de  $M_2(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D$  de  $M_2(\mathbb{R})$  dont la première colonne est nulle vérifiant la relation :

$$A = PDP^{-1}$$

Donner l'écriture matricielle de  $P^{-1}$ .

## 2.2. Diagonalisation de $\phi_A$ .

1. Montrer que  $\phi_A$  est un endomorphisme de  $M_2(\mathbb{R})$ .
2. Etablir que  $X^3 - X$  est un polynôme annulateur de  $\phi_A$ . En déduire les valeurs propres possibles de  $\phi_A$ .
3. Montrer que la matrice  $M$  est un vecteur propre de  $\phi_A$  associée à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si la matrice  $N = P^{-1}MP$  est non nulle et vérifie l'équation matricielle :

$$DN - ND = \lambda N$$

4. On pose  $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .
  1. Trouver l'ensemble des matrices  $N$  telles que  $DN - ND = 0$ .
  2. En déduire que la famille  $(A, M_1)$  avec  $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$  est une base du sous-espace propre  $\text{Ker}\phi_A$  associé à la valeur propre 0.
  3. Déterminer les deux autres valeurs propres non nulles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $\phi_A$  et caractériser les matrices  $N$  associées.
  4. En déduire une base de chaque sous-espace propre  $E_{\lambda_1}$  et  $E_{\lambda_2}$  associé aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .
5. L'endomorphisme  $\phi_A$  est-il diagonalisable ?

### 3. EXERCICE.

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

#### 3.1. Mode de paiement de la clientèle.

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$

$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$

$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$

$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où  $S$  représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et  $U$  la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de  $S$  et  $U$  et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à  $p = \frac{3}{5}$ .
  2. Calculer la covariance du couple  $(S, U)$ . Les variables  $S$  et  $U$  sont-elles indépendantes ?
  3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.

Une caissière reçoit  $n$  clients dans sa journée ( $n \geq 2$ ).

On définit trois variables aléatoires  $C_n, L_1, L_2$  par :

- $C_n$  comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.

- $L_1$ (resp. $L_2$ ) est égale au rang du 1<sup>er</sup> (resp. du 2<sup>ème</sup>) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à zéro sinon.

1. Reconnaître la loi de  $C_n$ , rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.
2. Déterminer la loi de  $L_1$  et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n P[L_1 = k] = 1$$

3. Déterminer la loi de  $L_2$ .

### 3.2. Etude du temps moyen de passage en caisse.

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire  $T$  dont une densité de probabilité est donnée par la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1$ . Donner la valeur de l'espérance et de la variance de  $X$ .
2. Utiliser la question précédente pour vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité, puis montrer que  $T$  admet une espérance que l'on déterminera. Quel est le temps moyen de passage en caisse ?

1. Démontrer que la fonction de répartition de  $T$ , notée  $F_T$  est définie par :

$$\begin{aligned} \forall x < 0 & \quad F_T(x) = 0 \\ \forall x \geq 0 & \quad F_T(x) = 1 - (x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

2. Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités (de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à  $\frac{2e - 3}{2e}$ .
3. Un jour donné, trois clients  $A, B, C$  se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie,  $C$  décide de laisser passer  $A$  et  $B$  et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables  $T_A$  et  $T_B$  correspondant au temps de passage en caisse de  $A$  et  $B$  sont indépendantes.

1.  $M$  désignant le temps d'attente du client  $C$  exprimer  $M$  en fonction de  $T_A$  et  $T_B$ .
2. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire  $M$  est donnée par :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+ & P[M \leq t] = 1 - (1+t)^2 e^{-2t} \\ \forall t \in \mathbb{R}^{-*} & P[M \leq t] = 0 \end{cases}$$

3. Prouver que  $M$  est une variable à densité et expliciter une densité de  $M$ .