

ESPRIT GENERAL**Objectifs de l'épreuve**

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème...).

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

Sujets

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

Evaluation

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE 2008**Durée : 4 heures**

Aucun document et instrument de calcul ne sont autorisés.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

SUJET**Exercice 1**

A tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a + 2b & -b & -2b \\ 2b & a - b & -4b \\ -b & b & a + 3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent \mathbb{R} . Ainsi :

$$E = \{M(a, b) \mid a, b \text{ réels}\}$$

On note I la matrice identité $M(1, 0)$ et A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	SUJET	CORRIGE	RAPPORT
---------------------	-------	---------	---------

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	SUJET	CORRIGE	RAPPORT
---------------------	-------	---------	---------

- Donner une base de E ainsi que sa dimension.
- Vérifier que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de A .
Donner les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
En déduire que la matrice A est diagonalisable.
- Déterminer deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :
 - P est inversible et ses trois éléments diagonaux sont égaux à 1.
 - $D = (d_{i,j})$ est diagonale avec $d_{1,1} = 2$.
 - $D = P^{-1}AP$.
 Donner l'expression de la matrice P^{-1} .
- Prouver que la matrice $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale.
- Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.
- Prouver que $[M(a,b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a,b)]^2 = I$.
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a,b)]^2 = I$.

Exercice 2

On considère les fonctions suivantes :

$$g(x,y) = 1 + \ln(x+y) \quad (\text{fonction des variables réelles } x \text{ et } y),$$

$$\text{et pour } p \in \mathbb{N}^* \begin{cases} f_p(x) = g(x,p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases} \quad (\text{familles de fonctions de la variable réelle } x).$$

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

2.1. Recherche d'extremum éventuel de la fonction g .

- Représenter, relativement à un repère orthonormé du plan, le domaine de définition D de la fonction g . On hachurera D . On admet que cet ensemble est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Déterminer sur D les dérivées partielles premières de g . La fonction g admet-elle un extremum sur D ?

2.2. Etude de la fonction f_1 .

- Donner le domaine de définition de f_1 .
- Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction f_1 .
- En déduire une équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe C_1 par rapport à cette tangente .
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$. Donner une interprétation graphique de ces limites.

2.3. Etude d'une suite $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$.

- Montrer que l'équation $f_p(x) = x$ admet une unique solution α_p sur l'intervalle $]0, +\infty[$. (On ne cherchera pas à calculer α_p).
- Déterminer le signe de $h_p(\alpha_{p+1})$ et en déduire que la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ est monotone.
- Prouver que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln p.$$
 Quel est le comportement de la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ lorsque p tend vers $+\infty$?

2.4. Valeur approchée de α_1 .

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1, 3]$.
On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_1(u_n). \end{cases}$$

- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n \geq 1.$$
- Appliquer à f_1 l'inégalité des accroissements finis entre α_1 et u_n et en déduire que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
- Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si l'entier n est supérieur ou égal à n_0 alors $|u_n - \alpha_1|$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .
- Ecrire un programme en langage Pascal permettant d'obtenir les valeurs de n_0 et de u_{n_0} .

Exercice 3

On s'intéresse dans cet exercice à l'étude de trois jeux présents dans une fête foraine.

3.1. Premier jeu.

Pour ce premier jeu de hasard, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\frac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\frac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

- Donner la loi de X_N , ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.

ESPRIT DE L'ÉPREUVE **SUJET** CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE **SUJET** CORRIGE RAPPORT

2. Exprimer Y_N en fonction de X_N . En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N .
3. La personne décide de jouer 60 parties. On admet que l'on peut approcher X_{60} par une loi de Poisson.
 - a. Donner le paramètre de cette loi de Poisson.
 - b. A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (Cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exercice).

3.2. Deuxième jeu.

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact au centre O de la $i^{\text{ème}}$ fléchette. Ces trois variables X_1, X_2, X_3 , de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Le joueur gagne si la fléchette la plus proche du centre O se trouve à distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3 .

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i .
2. Déterminer l'espérance de X_i .
3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout t réel.
4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M .
5. Quelle est la probabilité de l'événement $G =$ "le joueur gagne la partie" ?

3.3. Troisième jeu.

Pour ce dernier jeu, le participant lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N avec $N \geq 2$. On suppose que les différents lancers de boules sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule quelconque tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. Le gain étant fonction du nombre de cases atteintes, on étudie la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides à l'issue des n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et N les valeurs prises par T_n .
2. Donner les lois de T_1 et de T_2 .
3. Déterminer, lorsque $n \geq 2$, la probabilité des événements $[T_n = 1], [T_n = 2], [T_n = n]$. (pour la dernière probabilité on distinguera deux cas $n > N$ et $n \leq N$).
4. A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier l'égalité (I) suivante, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

$$(I) \quad P([T_{n+1} = k]) = \frac{k}{N}P([T_n = k]) + \frac{N - k + 1}{N}P([T_n = k - 1]).$$

5. Afin de calculer l'espérance $E(T_n)$ de la variable T_n , on considère la fonction polynomiale G_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(x) = \sum_{k=1}^n P([T_n = k])x^k$$

- a. Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
- b. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
- c. En utilisant la relation (I), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x).$$

- d. En dérivant l'expression précédente, en déduire que :

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1.$$

- e. Prouver enfin que l'espérance de la variable T_n est donnée par :

$$E(T_n) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right].$$

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\sum_{i=0}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$

k	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$	$\lambda=6$	$\lambda=7$
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13		0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14		1,0000	0,9998	0,9986	0,9943
15			0,9999	0,9995	0,9976
16			1,0000	0,9998	0,9990
17				0,9999	0,9996
18				1,0000	0,9999
19					1,0000
20					

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

CORRIGE

Exercice 1

1. $E = \text{Vect}(I, A)$ donc E est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$
 2. (I, A) est une famille génératrice de E , de plus I et A ne sont pas colinéaires donc (I, A) est une famille libre de E ainsi (I, A) est une base de E , ce qui prouve que $\dim E = 2$.
 3. Considérons la matrice $(A - 2I)$ et étudions l'équation $(A - 2I)X = 0$ (1)
 $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$ ce qui prouve qu'il existe des solutions non nulles à l'équation
 $(A - 2I)X = 0$ donc 2 est une valeur propre de A et le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est
 $E_2 = \{(-z, -2z, z) / z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(-1, -2, 1)\}$, soit $e_1 = (-1, -2, 1)$, (e_1) est une base de E_2 donc $\dim E_2 = 1$.
 Considérons la matrice $(A - I)$ et étudions l'équation $(A - I)X = 0$ (1)
 $(1) \Leftrightarrow x - y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = y + 2z$ ce qui prouve qu'il existe des solutions non nulles à l'équation
 $(A - I)X = 0$ donc 1 est une valeur propre de A et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est
 $E_1 = \{(y + 2z, y, z) / y \text{ et } z \text{ réels}\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$, soit $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (2, 0, 1)$, (e_2, e_3) est une base de E_1 donc $\dim E_1 = 2$.
 $\dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, ce qui prouve que A ne possède que 1 et 2 comme valeurs propres et de plus A est diagonalisable.

4. P est une matrice de passage : prenons comme base de vecteurs propres : $B = \{-e_1, e_2, e_3\}$ alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Gamma(D) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la méthode de Gauss ou la résolution du système : $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + y = b \\ -x + z = c \end{cases}$ on obtient : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$5. P^{-1}M(a,b)P = P^{-1}(aI + bA)P = P^{-1}aIP + P^{-1}bAP = aP^{-1}IP + bP^{-1}AP = aI + bD = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Donc $P^{-1}M(a,b)P = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$

6. Supposons $M(a,b)$ inversible, alors comme P et P^{-1} sont inversibles on en déduit que $D(a,b)$ est inversible : produit de matrices inversibles.
 De plus on peut écrire $M(a,b) = PD(a,b)P^{-1}$, donc en raisonnant comme ci-dessus on en déduit que si $D(a,b)$ est inversible alors $M(a,b)$ est inversible.
 Ainsi : $M(a,b)$ inversible si et seulement si $D(a,b)$ inversible.
 $D(a,b)$ étant une matrice diagonale, $D(a,b)$ inversible $\Leftrightarrow a - 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$ donc :
 $M(a,b)$ est inversible $\Leftrightarrow a + 2b \neq 0$ et $a + b \neq 0$.

7. $D(a,b) = P^{-1}M(a,b)P$, donc $D(a,b)^2 = P^{-1}M(a,b)P P^{-1}M(a,b)P = P^{-1}[M(a,b)]^2 P$ (1)
 De même : $M(a,b)^2 = P[D(a,b)]^2 P^{-1}$ (2)
 Supposons que $D(a,b)^2 = I$, alors d'après (2) on en déduit que $M(a,b)^2 = I$.
 Supposons que $M(a,b)^2 = I$, alors d'après (1) on en déduit que $D(a,b)^2 = I$.
 Ainsi : $M(a,b)^2 = I \Leftrightarrow D(a,b)^2 = I$
 Il faut déjà résoudre $D(a,b)^2 = I$ (3), $D(a,b)$ étant une matrice diagonale on en déduit que :

$$D(a,b)^2 = \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} \text{ donc (3) } \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2b)^2 = 1 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b=-1 \\ a+b=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a+2b=-1 \\ a+b=-1 \end{cases} \right)$$

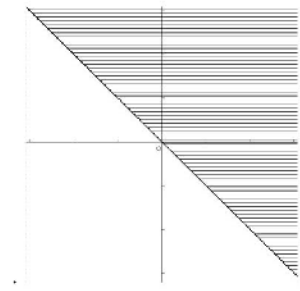
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

Il existe donc 4 matrices $D(a,b)$ vérifiant $D(a,b)^2 = I$.
 Les 4 matrices $M(a,b)$ vérifiant $M(a,b)^2 = I$ sont donc : $P D(a,b) P^{-1}$ avec les quatre couples possibles pour (a,b) .

On obtient après calculs : les 4 matrices vérifiant $M(a,b)^2 = I$ sont : $I, M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 8 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, M_2 = -M_1, -I$.

Exercice 2

2.1.1. $g(x,y)$ existe $\Leftrightarrow x + y > 0$, on trace alors la droite d'équation $y = -x$: « frontière de l'ensemble » et par exemple le point $(1,1)$ est un élément de D



2.1.2. $\forall (x,y) \in D, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

Supposons que g admette un extremum en $(x_0, y_0) \in D$: ouvert de \mathbb{R}^2 alors $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ ce qui est impossible donc g n'admet pas d'extremum sur D .

2.2.1 $f_1(x) = g(x,1) = 1 - \ln(x+1)$ donc $D_{f_1} =]-1, +\infty[$.

2.2.2. En utilisant le DL₂(0) de $\ln(1-x)$ on obtient : En 0 : $f_1(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	SUJET	CORRIGÉ	RAPPORT
---------------------	-------	---------	---------

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	SUJET	CORRIGÉ	RAPPORT
---------------------	-------	---------	---------

2.2.3. Comme en 0, $f_1(x) = f(0) + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ on peut en déduire que :

L'équation de la tangente à la courbe en $(0, f(0))$ est $y = 1 + x$.

De plus, au voisinage de 0 : $f_1(x) - (1+x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} < 0$ donc

la courbe représentative de f_1 est au voisinage de 0 en dessous de sa tangente.

2.2.4. Il est clair que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$ et d'après le théorème des croissances comparées on peut écrire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0$$

On peut en déduire que la courbe représentative de f_1 admet en $+\infty$ une branche parabolique suivant (Ox) .

2.3.1. Étudions la fonction h_p sur $I =]0, +\infty[$.

h_p est dérivable sur I et $\forall x \in I, h_p'(x) = 1 - \frac{1}{x+p} = \frac{x+p-1}{x+p} > 0$ car $p \geq 1$ et $x > 0$, donc h_p est une fonction

strictement croissante sur I , elle réalise donc une bijection de I dans $h_p(I) =]\lim_{x \rightarrow 0} h_p(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x)[$

Il est clair que $\lim_{x \rightarrow 0} h_p(x) = -\ln p - 1 < 0$

De plus : $h_p(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x+p)}{x} \right)$ donc en utilisant le théorème des croissances comparées on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_p(x) = +\infty$$

Donc h_p réalise une bijection de I dans $]-\ln p - 1, +\infty[$ et comme $0 \in]-\ln p - 1, +\infty[$, on en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha_p / h_p(\alpha_p) = 0$ donc qu'il existe un unique réel $\alpha_p / f_p(\alpha_p) = \alpha_p$.

2.3.2.

$h_p(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1} - f_p(\alpha_{p+1})$, or $f_p(\alpha_{p+1}) = 1 - \ln(\alpha_{p+1} + p) \leq 1 + \ln(\alpha_{p+1} - p + 1) \leq f_{p+1}(\alpha_{p+1}) = \alpha_{p+1}$

donc $h_p(\alpha_{p+1}) \geq 0$.

$h_p(\alpha_p) = 0$ et $h_p(\alpha_{p+1}) \geq 0$ de plus la fonction h_p est croissante sur I donc $\alpha_{p+1} \geq \alpha_p$ ce qui prouve que :

la suite (α_p) est croissante.

2.3.3.

Soit $p \in \mathbb{N}$, par définition : $\alpha_p = 1 + \ln(p + \alpha_p)$ et $\alpha_p \in I$ donc $\alpha_p > 0$ ce qui donne : $\alpha_p \geq 1 + \ln(p)$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (1 + \ln(p)) = +\infty \text{ donc } \lim_{p \rightarrow +\infty} \alpha_p = +\infty$$

2.4.1. Soit $P(n) : u_n \geq 1$.

Par définition $P(0)$ est vraie. Supposons $P(n)$ pour un entier n fixé $n \geq 0$, alors $u_{n+1} = 1 + \ln(1 + u_n)$ et comme $u_n \geq 1$ on en déduit que $\ln(1 + u_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

2.4.2. f est continue sur l'intervalle $[\alpha_1, u_n]$, dérivable sur $[\alpha_1, u_n]$ et pour $x \geq 1, f'(x) = \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$ donc d'après

l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre α_1 et u_n on a : $|u_{n+1} - \alpha_1| = |f(u_n) - f(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$

On démontre alors par récurrence que : $|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha_1|$

Or $u_0 = 1$ et $\alpha_1 \in [1, 3]$ donc $|u_0 - \alpha_1| \leq 2$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

2.4.3. Pour que $|u_n - \alpha_1|$ soit inférieur à 10^{-4} il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ soit inférieur à 10^{-4} .

De plus $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow (n-1) \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -4 \ln(10) \Leftrightarrow n-1 \geq \frac{-4 \ln(10)}{-\ln 2}$ car $-\ln(2) < 0$

$\Leftrightarrow n \geq \frac{4 \ln(10)}{\ln 2} + 1$ il suffit donc de prendre pour n_0 le premier entier supérieur à $\frac{4 \ln(10)}{\ln 2} + 1$

c.à.d il suffit de prendre $n_0 = \text{Partie entière de } \left(\frac{4 \ln(10)}{\ln 2} + 1 \right) + 1$.

2.4.4. Program exo2 ;

Var n : integer ; u : real ;

Begin

u := 1 ; n := 0 ;

while n ≤ $\frac{4 \ln 10}{\ln 2} + 1$ do

begin

n := n + 1 ;

u := 1 + ln(1 + u) ;

end ;

writeln(n) ; writeln(u) ;

end.

Exercice 3

3.1.1. X_N représente le nombre de succès dans une suite de N épreuves identiques et indépendantes et la probabilité d'un

succès est $\frac{1}{10}$ donc $X_N \rightarrow B\left(N, \frac{1}{10}\right)$

Ce qui signifie que : $X_N(\Omega) = \{0, N\}$ et $\forall k \in \{0, N\}, P(X_N = k) = \binom{N}{k} \left(\frac{1}{10}\right)^k \left(\frac{9}{10}\right)^{N-k}$

D'après le cours : $E(X_N) = \frac{N}{10}$ et $V(X_N) = \frac{9N}{100}$

3.1.2. Y_N représente le gain algébrique du joueur donc $Y_N = 3 * (\text{nombre de parties gagnées}) - (\text{mise})$

Ce qui donne $Y_N = 3X_N - N$.

Par propriété de l'espérance et de la variance : $E(Y_N) = 3E(X_N) - N = \frac{7N}{10}$ et $V(Y_N) = 9V(X_N) = \frac{81N}{100}$

3.1.3

a. D'après le cours $\lambda = np = 6$.

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

b. Notons Z la variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 6.

On cherche $P(Y_N > -50) = P(3X_N - 60 > -50)$
 $= P(3X_N > 10)$
 $\approx P(Z > 3.3) = 1 - P(Z < 3.3) = 1 - P(Z \leq 3) \approx 1 - 0.1512 = 0.8488$

Donc la probabilité pour que le joueur perde moins de 50€ est environ 0.85.

3.2. 1. f est une fonction positive sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} sauf en 1, et :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = 1, \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_2^{+\infty} f(x) dx = 0 \text{ donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Donc f est une densité de probabilité.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Donc si $x < 0$ alors $F(x) = 0$
 Si $0 \leq x \leq 1$ alors $F(x) = \int_0^x 2t dt = x^2$.
 Si $x > 1$ alors $F(x) = 1$.

3.2.2. Comme f est nulle en dehors de $[0,1]$ on en déduit que X admet une espérance et $E(X) = \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{2}{3} x^4 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

donc $E(X) = \frac{2}{3}$

3.2.3 Soit $t \in \mathbb{R}$, $M = \inf(X_1, X_2, X_3)$ donc : $\forall t \in \mathbb{R} : [M > t] = [X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap [X_3 > t]$.

3.2.4. Soit $t \in \mathbb{R}$, $F_M(t) = P(M \leq t) = 1 - P(M > t) = 1 - P([X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap [X_3 > t])$
 $= 1 - P[X_1 > t] P[X_2 > t] P[X_3 > t]$. Indépendance des variables aléatoires
 $= 1 - ((1 - F(t))^3)$

Donc : Si $t < 0$ alors $F_M(t) = 0$
 Si $0 \leq t \leq 1$ alors $F_M(t) = 1 - (1 - t^2)^3$.
 Si $t > 1$ alors $F_M(t) = 1$.

La fonction de répartition de M est continue sur \mathbb{R} , et de classe C^1 sur \mathbb{R} , sauf peut-être en 0 et en 1 donc M est une variable aléatoire à densité et une densité de M est :

Si $t < 0$, $f_M(t) = 0$
 Si $0 \leq t \leq 1$ $f_M(t) = 6t(1 - t^2)^2$
 Si $t > 1$ $f_M(t) = 0$.

5. $P(G) = P(M < 0.2) = F_M(0.2) = 1 - (1 - 0.2^2)^3 \approx 0.12$. donc $P(G) \approx 0.12$.

3.3.1 Si $n \leq N$ alors $T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et si $n \geq N$ alors $T_n(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$. Donc $T_n(\Omega) = \llbracket 1, \min(n, N) \rrbracket$.

3.3.2. $T_1(\Omega) = \{1\}$ on a donc une variable aléatoire certaine.

$T_2(\Omega) = \{1, 2\}$

$(T_2 = 1)$ signifie que les deux boules lancées tombent dans la même case, donc $P(T_2 = 1) = 1 \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N}$

Et donc $P(T_2 = 2) = 1 - \frac{1}{N}$.

3.3.3. $T_n = 1$ signifie que les n boules sont tombées dans la même case donc $P(T_n = 1) = 1 \times \frac{1}{N} \times \dots \times \frac{1}{N} = \left(\frac{1}{N}\right)^n$.

$[T_n = 2]$ signifie que toutes les boules sont tombées dans exactement 2 cases : N_1 et N_2

Le nombre total de possibilités est : N^n

Déterminons le nombre de résultats où toutes les boules sont tombées dans exactement 2 cases : on choisit ces deux cases N_1

et N_2 il y a ici : $\binom{N}{2}$ choix possibles. Il faut ensuite que toutes les boules tombent dans N_1 ou dans N_2 : 2 choix à chaque

lancer soit 2^N possibilités mais il faut enlever les cas où toutes les boules tombent dans N_1 : 1 cas et les cas où toutes les

boules tombent dans N_2 : 1 cas : il ya donc au total : $\binom{N}{2} (2^N - 2)$ cas favorables donc : $P(T_n = 2) = \frac{\binom{N}{2} (2^N - 2)}{N^n}$.

Si $n > N$ alors $[T_n = n]$ est impossible : il n'y a que N cases....

Si $n \leq N$ alors $[T_n = n]$ signifie que les n boules sont tombées dans n cases différentes.

Le nombre total de possibilités est : N^n

Le nombre de résultats où les n boules sont tombées dans n cases différentes est : $N(N-1) \dots (N-n+1)$

Donc pour $n \leq N$, $P(T_n = n) = \frac{N(N-1) \dots (N-n+1)}{N^n}$ et pour $n > N$, $P(T_n = n) = 0$.

3.3.4. Soit $1 \leq k \leq n$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(T_n = j)_{1 \leq j \leq n}$ en sachant que si $T_n = j$ est réalisé alors soit $T_{n-1} = j$ soit $T_{n-1} = j+1$. donc pour $k \neq j$ et $k \neq j+1$ on a $P(T_{n-1} = k / T_n = j) = 0$

Ce qui donne : $P(T_{n-1} = k) = (P_{(T_n=k)}(T_{n-1} = k)) \times P(T_n = k) + (P_{(T_n=k-1)}(T_{n-1} = k)) \times P(T_n = k-1)$

Or $P_{(T_n=k-1)}(T_{n-1} = k) = \frac{N-(k-1)}{N}$ la $(n+1)^{\text{ème}}$ tombe dans une case inoccupée.

Et $P_{(T_n=k)}(T_{n-1} = k) = \frac{k}{N}$ la $(n+1)^{\text{ème}}$ tombe dans une case déjà occupée.

Ce qui donne : pour $1 \leq k \leq n$ $P(T_{n-1} = k) = \frac{k}{N} \times P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} \times P(T_n = k-1)$.

3.3.5. a. $G_n(1) = \sum_{k=1}^n P(T_n = k) = 1$

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $G_n(x) = \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) x^{k-1}$ donc $G_n'(1) = E(T_n)$

c. On multiplie (1) par x^k et on somme ces égalités pour k variant de 1 à $n+1$, on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1} = k) x^k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N} P(T_n = k) x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1) x^k$$

Dans la première somme on reconnaît $G_{n+1}(x)$.

Dans la deuxième somme sachant que $P(T_n = n+1) = 0$ on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{N} P(T_n = k) x^k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{N} P(T_n = k) x^k = \frac{x}{N} \sum_{k=1}^n k P(T_n = k) x^{k-1} = \frac{x}{N} G_n'(x)$$

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

ESPRIT DE L'ÉPREUVE SUJET CORRIGE RAPPORT

Dans la troisième somme, on pose $j = k - 1$ et comme $P(T_n = 0) = 0$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1) x^k = \sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{j}{N}\right) P(T_n = j) x^{j+1} = x \sum_{j=1}^n P(T_n = j) x^j - \frac{x^2}{N} \sum_{j=1}^n P(T_n = j) x^{j-1} = xG_n(x) - \frac{x^2}{N} G_n'(x)$$

On a ainsi : $G_{n+1}(x) = \frac{x}{N} G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{1}{N} x^2 G_n'(x)$ ce qui donne : $G_{n+1}(x) = xG_n(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G_n'(x)$

d. Lorsque l'on dérive l'égalité ci dessus on obtient :

$$G_{n+1}'(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G_n'(x) + \frac{1}{N}(x-x^2)G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x) \text{ puis on prend } x=1 \text{ on a alors :}$$

$$G_{n+1}'(1) = \frac{1}{N}G_n'(1) + G_n(1) + G_n'(1)$$

En utilisant les questions 3.3.5a. et b on en déduit alors que : $E(T_{n+1}) = \frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n)$

D'où $E(T_{n+1}) - \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) = 1$. Posons $u_n = E(T_n)$ on a alors : $u_{n+1} - \left(1 - \frac{1}{N}\right)u_n = 1$ (1) donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

On cherche α / $\alpha = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\alpha + 1$ (2), on trouve $\alpha = N$.

En effectuant (1) - (2) on obtient : $\forall n \geq 1, u_{n+1} - \alpha = \left(1 - \frac{1}{N}\right)(u_n - \alpha)$ donc $(u_n - \alpha)$ est une suite géométrique de

raison $1 - \frac{1}{N}$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \alpha = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} (u_1 - \alpha)$

$$u_1 - E(T_1) = 1 \text{ d'où } u_n = -\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} (N-1) + N = N - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} (N-1)$$

D'où pour $n \geq 1$: $E(T_n) = N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$

RAPPORT

L'épreuve est bien adaptée aux candidats de cette série, de difficulté raisonnable elle couvre une large partie du programme. L'ensemble était peut-être un peu long, compte tenu de la difficulté finale du 3ème exercice.

BILAN DE LA CORRECTION DES COPIES

Exercice 1

Question 1 :

Trop de candidats reviennent à la propriété caractéristique d'un sous-espace vectoriel,

en justifiant plus ou moins bien. Des confusions avec la linéarité ! Plusieurs justifient que $aM+N$ appartient à $M_3(\mathbb{R})$. Les notations usuelles de la théorie des ensembles sont mal maîtrisées : appartenance, inclusion, non vide ou non nul, confusion entre matrice et vect, ...

Question 2 :

Un vect est le plus souvent reconnu ; quelques candidats oublient de vérifier que la partie génératrice est libre. A noter quelques dimensions farfelues (6, 9, ...).

Question 3 :

Beaucoup d'erreurs de calcul dans cette question, notamment pour ceux qui transforment $A-xI$.

Egalement beaucoup d'erreurs élémentaires de calcul dans la résolution de systèmes pourtant très simples pour déterminer les sous-espaces propres.

La justification de A diagonalisable pose de nombreux problèmes ; on trouve souvent une somme de dimensions égale à 3, mais rares sont ceux qui savent à quoi correspond 3. On trouve souvent : $\dim(M_3(\mathbb{R}))=3...$

Question 4 :

Beaucoup de réponses non justifiées, et des matrices qui ne vérifient pas les conditions demandées ; néanmoins, lorsque P est faux, le calcul de P^{-1} (majoritairement par la méthode de Gauss) est très souvent correct.

Question 5 :

Beaucoup d'erreurs de calcul matriciel dans $D(a, b)$.

La condition d'inversibilité d'une matrice diagonale est connue ; elle est hélas parfois appliquée à une matrice non diagonale.

Question 6 :

Le "si et seulement si" pose problème ; souvent, un seul sens est démontré.

Question 7 :

Même remarque sur le "si et seulement si", et cette question est rarement traitée.

L'existence des quatre matrices n'est trouvée que sur deux copies, et encore ne sont-elles pas déterminées.

Exercice 2

La correction de cet exercice montre que les notions les plus élémentaires d'analyse ne sont pas connues : calcul sur les fractions, équations de droites, existence d'un logarithme, hypothèses des théorèmes usuels...

Question 2.1. :

La condition d'existence de $g(x,y)$ est souvent donnée, mais les domaines hachurés sont souvent faux, parfois incompréhensibles.

Quelques erreurs de dérivation dans les dérivées partielles premières de g ; de graves erreurs dans la nullité de ces dérivées, menant souvent à la nullité du **dénominateur**.

La condition nécessaire d'existence d'un extremum est mal maîtrisée ; les hypothèses D ouvert et g est c^1 sont quasiment toujours ignorées ; beaucoup de candidats utilisent les dérivées secondes pour répondre.

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	SUJET	CORRIGE	RAPPORT
---------------------	-------	---------	---------

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	SUJET	CORRIGE	RAPPORT
---------------------	-------	---------	---------

Question 2.2. :

Que d'erreurs dans le domaine de définition de f_1 , qui devient souvent \mathbb{R}^+ !
De nombreuses erreurs dans le développement limité, parfois de signe de $x^2/2$, parfois de changement de variable. L'ordre du développement n'est pas toujours respecté.
Beaucoup de candidats ne déduisent pas les résultats de la question 3 du développement limité précédent, utilisant l'équation d'une tangente, et étudiant une fonction auxiliaire pour obtenir la position locale de la courbe par rapport à sa tangente. A noter des équations de tangente du second degré, voire homographiques !
La limite de f_1 en plus l'infini est rarement justifiée ; quant à celle de $f_1(x)/x$, bien rares sont ceux qui fournissent une justification correcte, qui se limite souvent au mieux à "d'après la croissance comparée" ; à noter un nombre important de candidats qui utilisent le développement limité de la question 2 pour calculer cette limite !
L'interprétation graphique donne lieu à toutes sortes de sottises, le plus drôle étant "une asymptote oblique horizontale" ou une tangente... ; le vocabulaire précis des branches infinies n'est absolument pas maîtrisé.

Question 2.3. :

A la question 1, le théorème de la bijection est majoritairement appliqué à la fonction f_p , ce qui ne donne rien. Pour ceux qui se ramènent à l'utilisation de la fonction h_p , ou de $-h_p$, l'étude du sens de variation et le calcul de la limite en plus l'infini sont rarement justifiés avec soin.
Le signe de $h_{p+1}(x)$ et le sens de variation de la suite sont peu abordés, et souvent faux. L'inégalité de la question 3 est également peu traitée, parfois avec des récurrences bien inutiles ; la conclusion sur la limite est plus souvent correcte, encore que beaucoup trop de candidats trouvent une suite convergente, en utilisant un théorème de croissance majorée.

Question 2.4. :

La récurrence est souvent correcte, mais certains utilisent, sans justifier, le sens de variation de f_1 .
Les hypothèses exactes de l'inégalité des accroissements finis sont floues ; la récurrence a posé de nombreux problèmes pour l'initialisation.
La question 3 voit les erreurs traditionnelles : division par un logarithme négatif sans changement de sens de l'inégalité.
Les programmes en Pascal tournent rarement ; néanmoins, les variables sont souvent déclarées, et il y a des boucles.

Exercice 3

Premier jeu :

La loi de X_N est très souvent reconnue, moins souvent justifiée, parfois confondue avec une autre loi ; quelques candidats confondent les formules de l'espérance et de la variance avec celles d'une loi uniforme ou d'une loi géométrique. A noter qu'un nombre non négligeable de candidats ne respectent pas les notations, N devenant n . Beaucoup d'erreurs dans l'expression de Y_N en fonction de X_N , la formule revenant souvent étant $Y_N=3X_N$; les formules de $E(aX+b)$ et $V(aX+b)$ sont cependant très souvent connues, un peu moins pour $V(aX+b)$.

Le paramètre de la loi de Poisson est souvent correct, donné sans justification.
La question 3b est rarement traitée, et souvent fautive ; la probabilité cherchée n'est que peu reconnue, et la lecture dans la table hasardeuse.

Deuxième jeu :

Quelques erreurs dans la définition d'une densité (f croissante, f est c^1 , ...)
Des confusions fréquentes entre les variables t et x dans la définition de la fonction de répartition, et des notations inappropriées du style $F(X_i)$ ou $F=x^2$, ou $F(t)=x^2$. L'erreur fréquente est $F(x)=0$ si $x > 1$.
Des confusions entre intersection et réunion pour décrire l'événement $(M>t)$, ou entre probabilités et événements.
Beaucoup d'erreurs dans la détermination de F_M , souvent d'étourderie, voire de calculs ; l'indépendance des variables X_i n'est pas toujours rappelée.
Montrer que M est une variable à densité a posé de nombreux problèmes, la caractérisation à l'aide de la fonction de répartition étant peu ou mal connue ; beaucoup croient utile de vérifier des propriétés comme les limites en l'infini, le sens de variation, etc.... Ceux qui connaissent se contentent souvent d'affirmer, sans justifier.

Troisième jeu :

Cette partie a été très souvent non traitée, ou fort mal traitée.
Rares sont les réponses correctes aux questions 1 à 3, où beaucoup de candidats ont cru devoir reconnaître une loi usuelle.
La réponse à la question 4 étant donnée, il y a des tentatives de réponses, souvent très incomplètes : le système complet d'événements est mal identifié, et les probabilités k/N et $(N-k+1)/N$ pas justifiées.
A la question 5, la valeur de $G_n(1)$ est rarement trouvée, de même que l'expression de $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
La relation de la question c. n'est correctement obtenue sur aucune copie.
A la question d, aucune réponse complète là aussi ; les quelques candidats qui ont essayé, dérivent $G_{n+1}(x)$ et s'arrêtent là.
A la question e, quelques rares récurrences, mal initialisées ; peu de reconnaissance d'une suite arithmético-géométrique, et des calculs qui n'aboutissent pas.

CONCLUSION

Ce sujet a permis, par un barème adapté, de hiérarchiser convenablement les différents candidats, et de valoriser ceux qui ont fait les efforts d'assimilation des connaissances et méthodes. Certaines questions font référence à des résultats ou méthodes classiques du cours et permettent à tout candidat sérieux d'avoir une note correcte, d'autres questions sont plus difficiles et valorisent la réflexion et la qualité du raisonnement. La moyenne est de **10,18** avec un écart-type de **4,85**.