Banque « Agro »
**A et AE - 0298-**

**MATHÉMATIQUES**
**ÉPREUVE A**
Durée : 3h 30

***L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.***

***Les candidats doivent traiter les deux problèmes qui sont totalement indépendants.***

PROBLEME I

Le but de ce problème est l'étude de la suite $u$, indexée par $\mathbb{N}^*$ et définie par :
- son premier terme $u_1$ strictement positif.
- la relation, pour tout $n$ naturel non nul :

$$(1) \quad u_{n+1} = u_n\left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

**Partie A** *Définition de la suite à l'aide d'une suite de fonctions.*

**1.** Prouver que si $u$ admet une limite dans $\mathbb{R}$, elle est nécessairement égale à 0 ou 1.

**2.a.** Justifier l'existence d'une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
- Pour tout $x$ réel positif : $f_1(x) = x$.
- Pour tout $n$ entier naturel non nul et tout $x$ réel positif :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)\left(f_n(x) + \frac{1}{n}\right)$$

**2.b.** Exprimer, pour $n$ entier naturel non nul, $u_n$ en fonction de $f_n$ et de $u_1$.

**3.** Dans cette question $n$ est un entier naturel non nul fixé. En raisonnant par récurrence, justifier les résultats suivants.

**3.a.** $f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

**3.b.** $f_n(0) = 0$

**3.c.** $f_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**3.d.** Pour tout réel strictement positif $m$, il existe un unique réel $x$ strictement positif, tel que : $f_n(x) = m$

**Partie B** *Etude d'un cas particulier.*

**1.** Montrer que, pour tout $n$ entier naturel non nul on peut définir deux réels uniques $\alpha_n$ et $\beta_n$ par les conditions :

$$\begin{cases} f_n(\alpha_n) = 1 - \dfrac{1}{n} \\ f_n(\beta_n) = 1 \end{cases}$$

PROBLEME II

Dans ce problème, on notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ ($n \geq 1$) et à coefficients complexes. $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$, I est la matrice unité et Id est l'endomorphisme identité sur $\mathbb{C}^n$.

***Rappels et résultat admis***
On rappelle que si une matrice admet $n$ valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, que les espaces propres sont de dimension 1 et que tout système constitué de $n$ vecteurs propres associés aux $n$ valeurs propres est une base de $\mathbb{C}^n$.

**Question préliminaire :**
Montrer qu'une matrice carrée a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

**Partie A** : *Une méthode d'inversion de matrice de passage de vecteurs propres.*
**1.** Dans cette question, $M$ est une matrice dont le terme de la ligne $i$ et de la colonne $j$ est noté $m_{i,j}$.
On désignera par $D$ la matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont notés $\lambda_1,..,\lambda_n$.
Déterminer le terme de la ligne $i$ et de la colonne $j$ des matrices $M \times D$ et $D \times M$. Quel est l'effet sur la matrice $M$ d'une multiplication à droite ou à gauche par $D$ ?
**2.** On suppose désormais que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1,..,\lambda_n$. Soit $P$ une matrice inversible. Montrer que l'égalité : $A \times P = P \times D$ équivaut au fait que, pour tout $j$, le $j$-ième vecteur colonne de $P$ est un vecteur propre pour $A$ associé à $\lambda_j$.

**3.** Dans toute la suite, on notera $P = (p_{i,j})$ une matrice dont, pour tout $j$, le $j$-ième vecteur colonne est un vecteur propre pour $\lambda_j$ relativement à la matrice $A$. La matrice $Q = (q_{i,j})$ jouera le même rôle ( avec les mêmes valeurs propres) pour la matrice ${}^tA$.
**3.a.** Justifier l'égalité : $\quad {}^tQ \times A = D \times {}^tQ$

**3.b.** En déduire : $\quad A \times ({}^tQ)^{-1} = ({}^tQ)^{-1} \times D$
puis l'existence d'une matrice diagonale inversible $\Delta$ telle que l'on ait :

$$({}^tQ)^{-1} = P \times \Delta$$

*Indication* : On pourra interpréter les vecteurs colonnes de $({}^tQ)^{-1}$ en termes de vecteurs propres.
**3.c.** On note $\delta_1, ..., \delta_n$ les coefficients de la diagonale de $\Delta$. Après avoir justifié la relation :

$$\Delta \times {}^tQ = P^{-1}$$

montrer qu'ils sont déterminés par la relation :

$$\delta_i \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}\, q_{k,i} = 1$$

**4. Application** : Montrer que si les valeurs propres de $A$ sont toutes non nulles, alors $A$ est inversible et que le terme de la $i$-ième ligne et $j$-ième colonne de $A^{-1}$ vérifie :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \times \frac{p_{i,k}\, q_{j,k}}{\lambda_k}$$

**Partie B** : *Application au calcul de l'inverse d'une matrice.*
Dans toute cette partie on considère l'élément de $\mathscr{E}$ défini par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**1.a.** $m$ désigne dans cette question un entier naturel vérifiant : $1 \leq m \leq n$. Justifier, pour tout $k$ entier naturel la relation :

$$\sin\left(\frac{(k+1)m\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-1)m\pi}{n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{m\pi}{n+1}\right) \times \sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$$

**1.b.** En déduire que le vecteur $V_m$ dont la $k$-ième composante (pour $1 \leq k \leq n$) est égale à :

$$\sin\left(\frac{km\pi}{n+1}\right)$$

est un vecteur propre pour $A$ associé à la valeur propre $\lambda_m$ que l'on explicitera en fonction de $m$.
**1.c.** Montrer alors que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes non nulles.
**2.** On reprend désormais les notations de la partie ~~B~~. A
**2.a.** En utilisant ce qui précède, expliciter $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ pour $i$ et $j$ variant de 1 à $n$.
**2.b.** Dans cette question $x$ est un élément de $]0, \pi[$. Justifier la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \times \cos(n+1)x$$

En déduire une expression en fonction de $n$ et $x$ de la somme :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin^2(kx)$$

**2.c.** En utilisant la formule trouvée dans la question 3.c. de la partie ~~B~~ A, montrer que $\delta_i$ ne dépend pas de $i$ et donner sa valeur en fonction de $n$.
**3.** En déduire le coefficient de la ligne $i$ et de la colonne $j$ de la matrice $A^{-1}$.