Banque ≪ Agro ≫
A et AE -0299-

MATHÉMATIQUES
EPREUVE A
Durée 3h30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve

Les deux problèmes sont totalement indépendants.

PROBLEME I *Etude d'un endomorphisme*

Notations : E désignera l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions polynômiales (qu'on appellera aussi simplement polynômes) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si n est un entier naturel, on notera :

- E_n le sous-espace de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $f^{(n)}$ la dérivée n-ième d'une fonction numérique réelle f.
- X^n la fonction qui à tout x réel associe x^n.

- On désignera par Δ l'application qui à tout élément P de E associe $\Delta(P)$, défini, pour tout x réel par :

$$\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$$

PARTIE A.

A.1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E et que, pour tout n entier naturel, sa restriction à E_n définit un endomorphisme Δ_n de E_n.

A.2. Dans cette question on suppose : $n = 3$.
Ecrire la matrice de Δ_3 dans la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Déterminer son image et son noyau.

A.3. n désigne dans cette question un entier naturel non nul.

A.3.a. Justifier les relations : $\Delta_n(E_n) = E_{n-1}$ et $\ker(\Delta_n) = E_0$.

A.3.b. En déduire que, pour tout polynôme Q de E_{n-1}, il existe un unique polynôme P vérifiant les relations :

$$\begin{cases} \Delta_n(P) = Q \\ \int_0^1 P(x)dx = 0 \end{cases}$$

PARTIE B. *Etude d'une famille de polynômes*

Dans toute la suite du problème, on posera : $B_0 = 1$ et, pour tout n entier naturel non nul, on désignera par B_n l'unique polynôme vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta_n(B_n) = nX^{n-1} \\ \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \end{cases}$$

B.1. Calculer B_1 et B_2.

B.2. Déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de B_n.

B.3.a. Montrer que pour $n \geq 2$, on a : $B_n(0) = B_n(1)$

Tournez la page S.V.P

B.3.b. Établir que pour n non nul, la dérivée notée $B_n^{(1)}$ de la fonction polynômiale B_n vérifie la relation :

$$B_n^{(1)} = nB_{n-1}$$

Indication : on pourra, par exemple, calculer $\Delta(B_n^{(1)} - nB_{n-1})$.

B.3.c. On pose, pour tout x réel : $S_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$

Après avoir calculé, pour tout x réel, $\Delta(S_n)(x)$ en fonction de $\Delta(B_n)(-x)$, justifier l'égalité :

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

En déduire que, pour tout k entier naturel non nul, B_{2k+1} s'annule en 0, 1 et 1/2.

B.3.d. En s'inspirant de la méthode utilisée en B.3.c., justifier, pour n non nul et x réel :

$$B_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n\left(\frac{x}{2}\right) + B_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

En déduire pour k entier naturel non nul :

$$B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1 + 2^{1-2k})B_{2k}(0)$$

B.4.a. Montrer que B_3 n'a pas d'autres racines que 0, 1/2 et 1, en déduire qu'il ne s'annule pas sur]0,1/2[; montrer ensuite, sans calculer B_4 et B_5 et à partir des tableaux de variations de B_2 et B_3, que B_4 s'annule une et une seule fois sur]0,1/2[et que B_5 ne s'annule pas sur]0,1/2[.

B.4.b. Plus généralement, montrer par récurrence que, pour tout entier k non nul, B_{2k} s'annule une et une seule fois sur]0,1/2[et que B_{2k+1} ne s'annule pas sur]0,1/2[.

B.4.c. En déduire en particulier que, pour k non nul, $|B_{2k}(x)|$ atteint son maximum sur [0,1] en 0.

PARTIE C. *Application au calcul approché d'une intégrale*

Dans toute cette partie f désigne une fonction numérique de classe C^{2n} sur [0,1], avec n un entier naturel non nul.

C.1. En intégrant deux fois par parties, justifier la relation :

$$\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)dx = B_2(0)\left[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)\right] - (f(0)+f(1)) + 2\int_0^1 f(x)dx$$

C.2. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right] + R_n$$

où :

$$R_n = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)B_{2n}(x)dx$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur k en exprimant R_k en fonction de R_{k+1} après avoir effectué deux intégrations par parties successives.

C.3. Justifier l'inégalité :

$$|R_n| \leq M\frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$$

où M désigne la borne supérieure de $|f^{(2n)}|$ sur $[0,1]$.

PROBLEME II

Notations :

• Si c et d sont deux entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant c lignes et d colonnes. Usuellement ${}^tM$ sera la matrice transposée de M.

• On conviendra d'utiliser la même notation pour une matrice colonne X ayant c lignes et le vecteur de $\mathbb{R}^c$ qu'elle représente dans la base canonique. De plus, on notera $\|X\|$ le réel positif défini par :

$$\|X\| = \sqrt{{}^tX.X}$$

• On appelle respectivement image et noyau d'un élément A de $\mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$:
$\mathrm{Im}\, A = \{Y \in \mathcal{M}_{c,1}(\mathbb{R}), \exists X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), Y = AX\}$ et $\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$

PARTIE A *Questions préliminaires*

A.1.a. Montrer que $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0$.

A.1.b. Justifier, pour tout λ réel et tout couple (X, Y) de matrices colonnes ayant r lignes l'égalité :

$$\|X + \lambda.Y\|^2 = \|X\|^2 + \lambda^2\|Y\|^2 + 2\lambda {}^tY.X$$

A.2. Montrer que si M est élément de $\mathcal{M}_{c,d}(\mathbb{R})$, N un élément de $\mathcal{M}_{d,c}(\mathbb{R})$ et si $P = M.N$ (produit des deux matrices), alors l'image de P est incluse dans l'image de M.

PARTIE B. *Un résultat d'existence*

Dans toute la fin du problème, r et s sont des entiers non nuls, A est un élément de $\mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{s,1}(\mathbb{R})$.

B.1.a. Justifier l'existence du produit ${}^tA.A$. Quelle est la dimension de la matrice ainsi obtenue ?

B.1.b. Vérifier l'inclusion : $\ker(A) \subset \ker({}^tA.A)$.

B.1.c. Montrer que si X est élément de $\ker({}^tA.A)$, on a alors : $\|A.X\| = 0$.

B.1.d. En déduire : $\mathrm{rg}({}^tA.A) = \mathrm{rg}(A)$.

B.2.a. En utilisant ce qui précède et les résultats de la partie A, montrer que les matrices ${}^tA$ et ${}^tA.A$ ont la même image.

B.2.b. Montrer qu'il existe X élément de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$${}^tA.A.X = {}^tA.B$$

PARTIE C. *Etude de l'équation matricielle* : (1) $A.X = B$

On rappelle que la matrice A n'est pas nécessairement carrée.

X élément de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est dite :

• une solution de (1) si : $A.X = B$

• une pseudo-solution de (1) si, pour tout Z de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$:

$$\|A.X - B\| \leq \|A.Z - B\|$$

C.1. Montrer que si (1) admet au moins une solution, alors X est une pseudo-solution si et seulement si c'est une solution de (1).

Tournez la page S.V.P

C.2. On suppose que X est une pseudo-solution. Montrer alors que, pour tout réel λ et tout élément Y de $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^2\|A.Y\|^2 + 2\lambda.{}^tY.{}^tA.(A.X - B) \geq 0$$

En déduire que nécessairement : ${}^tA.A.X = {}^tA.B$

C.3. Montrer, en utilisant les résultats de la partie B. qu'il existe toujours une pseudo-solution.

C.4. On suppose ici que : $\text{rg}(A) = r$. Montrer qu'il existe une unique pseudo-solution.