$\star$ Banque filière PT $\star$

Épreuve de Mathématiques I-A

Durée 4h

PROBLÈME

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Les trois parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A

1. Pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on note $a_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

   (a) On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

   i. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraine : $|u_n - \ell| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

   ii. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a :
   $$|a_n - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \ldots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - \ell| + \ldots + |u_n - \ell|}{n}.$$

   iii. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne :
   $$\frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \ldots + |u_{n_0} - \ell|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   iv. Conclure.

   (b) On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

   i. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.
   On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

   ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement bornée.
   On pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \begin{cases} p \text{ si } n = p^3 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   iii. On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.
   Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par ℓ. Conclure.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence :
   $$u_1 \in \,]0, \pi[\ ; \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < u_n < \pi$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

   (b) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :
   $$u_n - \sin u_n \sim \frac{u_n^3}{6} \text{ puis que } u_n^2 - u_{n+1}^2 \sim \frac{u_n^2 u_{n+1}^2}{3}.$$

   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\dfrac{1}{3}$.
   Démontrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_{n+1}^2 = 3$.
   En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum \alpha_k$ diverge.

   À toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on associe la suite de terme général : $a_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k}$.

   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_k = +\infty$.

   (b) En s'inspirant de la question 1.a., montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

4. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le réel ℓ.

   (a) Déterminer la limite de la suite de terme général : $v_n = \dfrac{1}{n^2}\left(u_1 + 2v_2 + \ldots + nu_n\right)$.

   (b) Même question avec la suite de terme général :
   $$w_n = \frac{1}{2^n}\left(C_n^0 u_0 + C_n^1 u_1 + \ldots + C_n^n u_n\right)$$
   où C_n^k désigne le coefficient binômial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

   On pourra montrer que $C_n^k \leqslant \dfrac{n^k}{k!}$.

PARTIE B

Soit $\sum a_n$ une série réelle convergente. On note S sa somme.

1. Montrer qu'alors la série entière de coefficients a_n a un rayon de convergence R au moins égal à 1.

   Dans toute la suite de cette partie on pose : $\forall x \in \left]-R, R\right[\quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   On se propose d'étudier la continuité de la fonction f en 1.

2. Montrer que si $R > 1$ alors f est continue en 1.

3. On se place dans le cas où $R = 1$. On note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle de rang n.

   (a) Soit $x \in \left]-1, 1\right[$ et $N \in \mathbb{N}$.

      i. Montrer que : $(1-x)\sum\limits_{n=0}^{N} S_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n - S_N x^{N+1}$.

      ii. En déduire que : $\lim\limits_{N\to+\infty}\left[(1-x)\sum\limits_{n=0}^{N} S_n x^n\right] = f(x)$.

   (b) Montrer alors que le rayon de convergence de la série entière de coefficients S_n est au moins égal à 1, et que :
   $$\forall x \in \left]-1, 1\right[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right).$$

   (c) Nous nous proposons de montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n} - S\right) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

      i. Vérifier que, pour tout réel $x \in \left]-1, 1\right[$, on a :
      $$\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n} - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n.$$

      On suppose donc pour la suite que $S = 0$.

ii. Montrer qu'il existe un entier positif N tel que : $n > N$ entraîne $|S_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

iii. En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$ $\left| \dfrac{\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

iv. Montrer enfin qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in [1-\eta, 1[$ $\left| \dfrac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Conclure.

(d) En déduire que la fonction f est continue en 1.

4. Établir la convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ puis déterminer sa somme.

PARTIE C

Soit (d_n) une suite réelle convergente.

1. Montrer que la série entière de coefficients $\frac{d_n}{n!}$ a un rayon de convergence R infini.

   Dans la suite de cette partie, à toute suite réelle (d_n) convergente, on associe la fonction f_d définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$
2. Montrer que la fonction f_d est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Nous nous proposons de montrer que si la suite (d_n) converge vers le réel ℓ, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} f_d(t) = \ell$.

   (a) Justifier l'existence d'une suite réelle (r_n) convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $d_n = \ell + r_n$.

   (b) Montrer que pour tout réel t on a : $f_d(t) = \ell e^t + f_r(t)$.

   (c) Soit $\varepsilon > 0$, prouver l'existence d'un entier n_0 tel que : $n > n_0$ entraîne $|r_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

   Montrer alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$|f_r(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0} \frac{|r_n|}{n!} t^n + \frac{\varepsilon}{2} e^t.$$
   (d) En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} f_r(t) e^{-t} = 0$. Conclure.

4. On pose $D_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d_k$.

   Montrer que pour tout réel positif x, on a :
$$\int_0^x f_d(t) e^{-t} \, \mathrm{d}\, t = f_D(x) e^{-x}.$$
5. En déduire que si $\sum u_n$ est une série numérique convergente alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-t) \, \mathrm{d}\, t = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$.