A 2012 MATH. I MP

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2012

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le but du problème est d'étudier la réduction de matrices définies à partir d'un résultat sur les dénombrements de certaines familles entières, en utilisant les propriétés des polynômes réciproques.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. Équations algébriques réciproques

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant n$.

1) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, l'application $u_n : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ donnée par la formule $u_n(P)(X) = X^n P(\frac{1}{X})$ est bien définie, et que c'est une symétrie.

Un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ est dit *réciproque de première espèce* s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit *réciproque de deuxième espèce* s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathscr{P}$ (respectivement à $\mathscr{D}$).

3) Établir que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est réciproque (c'est-à-dire $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$) et x est une racine de R, alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathscr{D}$ admet 1 pour racine, et que tout polynôme de $\mathscr{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.

4) Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.

5) Vérifier que $P \in \mathscr{P}$ implique $(X-1)P \in \mathscr{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathscr{D}$, il existe un unique $P \in \mathscr{P}$ tel que $D = (X-1)P$.

6) Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathscr{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Montrer que si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^p + \frac{1}{X^p} = P\Big(X + \frac{1}{X}\Big)$$

Quel est le degré de P ?

Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine.

8) Montrer que R est réciproque de première espèce et de degré pair. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait l'équivalence $R(x) = 0 \iff P(x + \frac{1}{x}) = 0$. Y a-t-il unicité du polynôme P ? de $\deg(P)$?

B. Un problème de dénombrement

Si i et j sont des entiers strictement positifs, on note $S_{i,j}$ (respectivement $S'_{i,j}$) l'ensemble des familles $u = (u_k)_{k\in\{0,1,\ldots,i\}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_i = j$ (respectivement $u_0 = 1$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_i \leqslant j$).

La notation $f|_E$ désigne la restriction d'une application f à une partie E de son ensemble de départ.

9) Vérifier que $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$ sont des ensembles finis et montrer que l'application

$$\begin{aligned} S_{i+1,j} &\longrightarrow S'_{i,j} \\ u &\longmapsto u|_{\{0,1,\ldots,i\}} \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Dans toute la suite du problème, on note $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ les cardinaux respectifs de $S_{i,j}$ et $S'_{i,j}$.

10) Montrer que $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$ et en déduire que $s'_{i+1,j+1} = s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$.

Si $p, q \in \mathbb{N}$, on note $\binom{p}{q}$ le nombre de parties à q éléments d'un ensemble à p éléments.

11) Prouver que $s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i}$ et en déduire la valeur de $s_{i,j}$.

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n(\mathbb{R})$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, d'élément neutre I_n pour la multiplication. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\det(M)$ son déterminant et Φ_M son polynôme caractéristique.

Dans cette partie, on démontre que pour tous A, B dans $M_n(\mathbb{R})$, on a l'égalité $\Phi_{AB} = \Phi_{BA}$.

12) Établir le résultat lorsque A est inversible.

13) Conclure en considérant la suite $(A - \frac{1}{k} I_n)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

D. Etude spectrale de certaines matrices

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère désormais les matrices $S = (s_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\dots,n+1\}}$ et $S' = (s'_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\dots,n+1\}}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$, où $s_{i,j}$ et $s'_{i,j}$ ont été définis dans la partie B.

14) Montrer que S est diagonalisable. La diagonaliser pour $n = 0$ et 1, et calculer Φ_S pour $n = 0$, 1 et 2.

15) Montrer que l'application $\psi : (\mathbb{R}_n[X])^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\psi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. On suppose désormais $\mathbb{R}_n[X]$ muni de celui-ci.

16) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (B_0, B_1, \dots, B_n)$ définie par $B_i = \frac{X^i}{i!}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et évaluer $\psi(B_i, B_j)$ pour $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$. En déduire que S est définie positive. Que peut-on en conclure sur les rangs de S et de S' ?

Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, on note $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par la formule $f_i(t) = t^i e^{-t}$. La notation $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

17) Pour $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixé, vérifier que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, $f_i^{(j)}(t) = o(t^{-k})$ quand $t \to +\infty$. Montrer que la formule suivante :

$$L_i(t) = (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)}{i!} e^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

définit un polynôme $L_i \in \mathbb{R}[X]$ dont on déterminera les coefficients.

18) Montrer que $\mathscr{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. (On pourra au préalable calculer $\psi(L_i, B_j)$ pour $j \leqslant i$.)

On considère l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\tau(P)(X) = P(X-1)$. On note T sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et $U = T^{-1}$ son inverse.

19) Expliciter T et U et les comparer à la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{L}$. En déduire S en fonction de U, puis les valeurs de $\det(S)$ et $\det(S')$.

On considère la matrice $D = (d_{i,j})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n+1\}}$ de $M_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$d_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{si } i = j\,; \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

20) Calculer $(DU)^2$ et en déduire que S^{-1} est semblable à $U\,U^t$, où U^t désigne la transposée de U.

21) En conclure que Φ_S est un polynôme réciproque et préciser de quelle espèce.

FIN DU PROBLÈME