Banque « Agro »
A et AE - 0898-

MATHÉMATIQUES
ÉPREUVE B
Durée : 3h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Rappels :

● On dit qu'une variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, si elle prend les valeurs 1 avec la probabilité p et 0 avec la probabilité $(1-p)$.

● Si U et V sont deux variables aléatoires réelles indépendantes admettant sur $\mathbb{R}$ des densités respectives f_U et f_V, alors une densité de la variable aléatoire $U+V$ est donnée par la formule :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t-x) \times f_V(x)\, dx$$

PARTIE I

Dans toute cette partie p est un réel qui vérifie : $0 < p < 1$. On note X la variable de Bernoulli de paramètre p et S_n la variable binomiale de paramètres (n, p) où n est un entier naturel non nul.

1. En utilisant la formule de Bienaymé-Tchebichev, justifier pour tout ε strictement positif la relation :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

2. Pour tout t réel strictement positif, on pose :

$$g(t) = E[e^{-tX}]$$

2.a. Calculer $g(t)$ en fonction de t et de p.

2.b. Justifier l'égalité :

$$E\left[\exp\left(-t\frac{S_n}{n}\right)\right] = \left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

3. Dans toute la fin de cette partie, a est un réel qui vérifie : $0 < a < p < 1$ et t est un réel strictement positif fixé.

3.a. Montrer l'égalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P\left[\exp\left(-t\left[\frac{S_n}{n} - a\right]\right) \geq 1\right]$$

3.b. Montrer que, pour toute variable aléatoire Y prenant un nombre fini de valeurs positives, on a l'inégalité :

$$P(Y \geq 1) \leq E[Y]$$

3.c. Déduire de ce qui précède :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

4.a. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation :

$$u(x) = ax + \ln(1 - p + p\,e^{-x})$$

Construire le tableau des variations de u et montrer que u atteint en un point x_0 de $\mathbb{R}^{*+}$ un minimum que l'on peut noter $-M$, où M est un réel strictement positif.

4.b. Après avoir justifié la relation :

$$\ln\left(e^{at}\left[g\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n\right) = n\,u\left(\frac{t}{n}\right)$$

justifier l'inégalité :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nM}$$

4.c. Donner une interprétation probabiliste de ce résultat pour : $a = p - \varepsilon$, où ε est un réel strictement positif.

PARTIE II

Dans toute cette partie, n est un entier naturel non nul, X est une variable aléatoire réelle admettant une espérance m et un écart type σ ; on considère $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes de même loi que X. On définit alors les variables aléatoires réelles :

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad S_n = \frac{Y_n}{n}$$

Question préliminaire : Déterminer l'espérance et la variance de S_n. Quelle est la limite de la variance de S_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat en termes probabilistes.

A. *Un résultat d'approximation à l'aide de la loi de Bernoulli.*

Dans cette sous-partie, X suit une loi de Bernoulli de paramètre m $(0 \leq m \leq 1)$.

A.1. Déterminer les valeurs prises par S_n et sa loi.

A.2. Dans cette question, u désigne une fonction continue sur $[0,1]$. K est réel strictement positif, tel que, pour tout x de $[0,1]$ on ait :

$$|\,u(x)\,| \leq K$$

A.2.a. Expliciter la quantité :

$$E[\,u(S_n)\,] - u(m)$$

sous forme d'une somme indexée par un entier k variant entre 0 et n.

A.2.b. Soit ε un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel α strictement positif, tel que, pour tout élément x de $[0,1]$, on ait l'implication :

$$(|x - m| < \alpha) \rightarrow \left(|u(x) - u(m)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

On note alors :

$$I_1 = \left\{k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n \quad \text{et} \quad \left|\frac{k}{n} - m\right| < \alpha\right\} \quad \text{et} \quad I_2 = \left\{k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n \quad \text{et} \quad \left|\frac{k}{n} - m\right| \ge \alpha\right\}$$

En remarquant que tout entier k compris entre 1 et n est élément, soit de I_1, soit de I_2, montrer que :

$$\left|E[\,u(S_n)\,] - u(m)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + 2K \times P[\,|S_n - m| \ge \alpha\,]$$

A.2.c. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que, pour tout réel ε strictement positif, on a, pour n suffisamment grand :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u\left(\frac{k}{n}\right) m^k (1 - m)^{n-k} - u(m)\right| < \varepsilon$$

B. *Un calcul de limite à l'aide de la loi exponentielle.*
Dans cette question, m est un réel strictement positif et X suit une loi exponentielle de paramètre $1/m$.
B.1.a. Donner l'espérance et l'écart type de X en fonction de m. En déduire l'espérance et la variance de S_n en fonction de m et de n.
B.1.b. Montrer par récurrence sur n qu'une densité de Y_n est donnée par la formule :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} \times \dfrac{x^{n-1}}{m^n} \exp\left(-\dfrac{x}{m}\right) & \text{si } x \ge 0 \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

B.2. Dans cette question, u désigne une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ par une constante K ; ε est un réel strictement positif et on notera α un réel strictement positif tel que l'implication suivante soit vraie pour tout x réel positif :

$$(|x - m| < \alpha) \rightarrow \left(|u(x) - u(m)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

f est une densité d'une variable Z, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, d'espérance m et de variance V.
B.2.a. Montrer que la variable aléatoire $u\,(Z)$ admet une espérance.
B.2.b. En s'inspirant de la méthode suivie au A.2.b., justifier, l'inégalité :

$$|E[\,u(Z)\,] - u(m)| \le \frac{\varepsilon}{2} + 2K \times \frac{V}{\alpha^2}$$

B.2.c. En déduire que la suite de terme général $E\,[u\,(S_n)\,]$ converge vers $u(m)$.
B.2.d. Justifier :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} \times \int_0^{+\infty} u(x) \left(\frac{nx}{m}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{nx}{m}\right) \times \frac{n}{m}\, dx\right] = u(m)$$

PARTIE III *Une formule d'inversion pour la transformée de Laplace.*

Dans toute cette partie f est une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ et on suppose que c'est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

1.a. Montrer que, pour tout n entier naturel et tout λ réel strictement positif, il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout réel x supérieur ou égal à A, on ait :

$$0 \leq e^{-\lambda x} x^n \leq 1$$

1.b. En déduire que, pour tout n entier naturel, on peut poser :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{*+},\ I_n(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^n f(x)\, dx$$

On notera en particulier L l'application définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $L(\lambda) = I_0(\lambda)$.

2. On désigne désormais par λ_0 un réel strictement positif fixé.

2.a. Justifier que, pour tout réel λ strictement supérieur à $\lambda_0/2$ et tout x réel positif, on a :

$$|e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x} + x(\lambda - \lambda_0) e^{-\lambda_0 x}| \leq x^2 \frac{|\lambda - \lambda_0|^2}{2} e^{-\frac{\lambda_0}{2} x}$$

2.b. En déduire, pour tout λ strictement supérieur à $\lambda_0/2$ et différent de λ_0, et pour tout réel A positif :

$$\left| \int_0^A \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda_0 x}}{\lambda - \lambda_0} f(x)\, dx + \int_0^A x e^{-\lambda_0 x} f(x)\, dx \right| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{2} \int_0^A x^2 e^{-\frac{\lambda_0}{2} x} f(x)\, dx$$

puis que L est dérivable en λ_0, avec :

$$L'(\lambda_0) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_0 x} x f(x)\, dx$$

2.c. Montrer plus généralement que, pour tout n, L admet en λ_0 une dérivée à l'ordre n donnée par la formule :

$$L^{(n)}(\lambda_0) = (-1)^n I_n(\lambda_0)$$

3. En utilisant le résultat de la question II.B.2.d, montrer que, si on suppose de plus que f est continue et bornée , alors, pour tout x de $\mathbb{R}^{*+}$, la suite de terme général :

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \times \left(\frac{n}{x}\right)^n \times L^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)$$

converge vers $f(x)$.