Banque ≪ Agro ≫
A et AE -0799-

MATHÉMATIQUES
EPREUVE B
Durée 3h30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve

Les Parties I et II sont indépendantes. Dans la partie II, on peut traiter les sections B et C en admettant les résultats de la section A.

L'objet du problème est de proposer des méthodes d'études, dans des cas particuliers, de modèles mathématiques visant à rendre compte de l'évolution d'un micro-organisme soumis à des radiations. On ne se préoccupera pas de la pertinence effective des modèles et des cas particuliers choisis, le but étant de mettre en évidence des traitements mathématiques de certains systèmes d'équations.
Ainsi, n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on supposera que chaque micro-organisme peut prendre $n+1$ états numérotés de 0 à n, l'état 0 correspondant à l'organisme sain et l'état n représentant la mort de l'organisme.

PARTIE I *Le modèle en temps discret*

On observe le micro-organisme à des instants successifs numérotés par des entiers naturels, l'instant dit "initial" étant numéroté 0. Entre deux instants successifs k et $k+1$ (k étant un entier naturel) les règles d'évolution du micro-organisme sont les suivantes :
(1) Si l'organisme est à l'instant k en l'état i avec $1 \leq i \leq n-1$, il sera, à l'instant $k+1$ en l'état $i+1$ avec la probabilité i/n et en l'état $i-1$ avec la probabilité $(n-i)/n$.
(2) Si l'organisme est à l'instant k en l'état 0 ou en l'état n, il y reste à l'instant $k+1$ avec une probabilité égale à 1.

On désigne, pour $1 \leq i \leq n-1$, par P_i la probabilité pour un micro-organisme d'atteindre l'état n sachant qu'il est au départ dans l'état i et ceci sans tenir compte du temps mis pour y parvenir. Par ailleurs on convient de poser : $P_0 = 0$ et $P_n = 1$.
1. On note :

$$(1) \quad P_i = \frac{i}{n} \times P_{i+1} + \frac{n-i}{n} \times P_{i-1}$$

Démontrer que la relation (1) est vraie dans le cas $n = 2$, pour $i = 1$.
Résultat admis : on supposera que, dans le cas général où n est supérieur ou égal à 2, (1) est vraie pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq n-1$.
2. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, $P_k = 1$. Montrer qu'alors la relation (1) est vraie pour tout entier i strictement positif.

Tournez la page S.V.P

3.a. Montrer qu'on définit une fonction G continue et dérivable sur $]-1,1[$, en posant :

$$G(s) = \sum_{k\geq 1} P_k s^k$$

3.b. En utilisant la relation (1), justifier, pour tout s élément de $]0,1[$:

$$s(1-s^2)G'(s) = \left(ns + 1 - (n-1)s^2\right) G(s)$$

3.c. Vérifier, pour tout s élément de $]0,1[$, la relation :

$$\frac{ns + 1 - (n-1)s^2}{s(1-s^2)} = \frac{n-1}{1+s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}$$

En déduire une expression de $G(s)$, à une constante multiplicative C près, sur $]0,1[$, puis sur $[0,1[$.

4.a. Rappels : on peut, pour tout s élément de $[0,1[$, écrire la relation :

$$\frac{1}{1-s} = \sum_{n\geq 0} s^n$$

Par ailleurs, lorsqu'une fonction admet un développement en séries, il y a unicité des coefficients.

Donner une expression de P_i, pour $1 \leq i \leq n$, en fonction de n et de C.

4.b. On a : $P_n = 1$.

Déterminer C puis P_i (pour tout i entier) en fonction de n. Préciser P_1.

PARTIE II *Le modèle en temps continu*

Le micro-organisme est ici observé à des instants réels, l'instant dit "initial" étant l'instant 0. Les hypothèses faites sont les suivantes, t désignant un réel positif et h un réel strictement positif :

(1) Pour tout i compris entre 1 et n, h désignant un réel, un organisme à l'état $i-1$ au temps t sera au temps $t+h$ dans l'état i avec une probabilité : $\lambda_i h + o(h)$, $o(h)$ désignant usuellement une expression de la forme $h\varepsilon(h)$, $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 lorsque h tend vers 0.

(2) Pour tout i compris entre 0 et $n-1$ et h réel, un organisme à l'état $i+1$ au temps t sera au temps $t+h$ dans l'état i avec une probabilité : $\mu_i h + o(h)$

(3) Pour tout i compris entre 0 et n et h réel, la probabilité pour un organisme d'atteindre un autre état que $i-1$, i et $i+1$ (lorsque ces entiers sont bien compris entre 0 et n) est égale à : $o(h)$

(4) On supposera que les $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont strictement positifs, que les $(\mu_i)_{0\leq i\leq n-2}$ sont positifs et que μ_{n-1} est nul.

(5) On notera $X(t,i)$ la probabilité pour un organisme d'être à l'état i au temps t et on supposera qu'à l'instant 0 le micro-organisme est en l'état 0 avec un probabilité égale à 1.

On désignera par f_i la fonction qui à tout t de $\mathbb{R}^+$ associe $X(t,i)$.

Remarque : on supposera partout que $|h|$ est suffisamment petit pour que toutes les expressions ci-dessus qui définissent des probabilités soient bien à valeurs dans $[0,1]$.

A : LE MODELE

A.1. Dans cette question i est un entier vérifiant : $1 \leq i \leq n-1$, t est un réel positif et h un réel strictement positif.

A.1.a. Montrer que la probabilité pour un organisme à l'état i en t d'y être en $t+h$ est égale à : $1-(\lambda_{i+1}+\mu_{i-1})h+o(h)$

Résultat admis : On admettra la relation :

$$X(t+h,i)=(\lambda_i h+o(h))X(t,i-1)+(1-(\lambda_{i+1}+\mu_{i-1})h+o(h))X(t,i)+(\mu_i h+o(h))X(t,i+1)$$

A.1.b. Montrer l'existence d'un réel K, indépendant de t et de h tel que l'on ait :

$$|X(t+h,i)-X(t,i)| \leq Kh+o(h)$$

En déduire lorsque $0<h\leq t$:

$$|X(t-h,i)-X(t,i)| \leq Kh+o(h)$$

A.2.a. En utilisant ce qui précède, montrer que f_i est continue à droite sur $\mathbb{R}^+$ et à gauche sur $\mathbb{R}^{*+}$.

A.2.b. En formant :

$$\frac{f_i(t+h)-f_i(t)}{h}$$

montrer que f_i est dérivable à droite sur $\mathbb{R}^+$.

A.2.c En s'inspirant de ce qui précède, montrer de même que f_i est dérivable à gauche sur $\mathbb{R}^{*+}$.

A.2.d. Démontrer que f_i est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et justifier de plus la relation, pour tout t réel strictement positif :

$$f_i'(t)=\lambda_i f_{i-1}(t)-(\lambda_{i+1}+\mu_{i-1})f_i(t)+\mu_i f_{i+1}(t)$$

On admettra qu'on montrerait de même que f_0 et f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$, dérivables à droite en 0 et que l'on a :

$$f_0'(t)=-\lambda_1 f_0(t)+\mu_0 f_1(t) \text{ et } f_n'(t)=\lambda_n f_{n-1}(t)$$

B : PREMIER CAS PARTICULIER *Un exemple numérique*

Dans cette partie, on fixe : $n=2$; $\lambda_1=2\lambda$; $\lambda_2=2\lambda$; $\mu_0=\lambda$; $\mu_1=0$, où λ désigne un réel strictement positif.

1. Montrer qu'il existe une matrice carrée A d'ordre 2, que l'on explicitera, telle que, pour tout t on ait :

$$\begin{pmatrix} f_0'(t) \\ f_1'(t) \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix}$$

2. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que l'on ait :

$$A=P\times D\times P^{-1}$$

Tournez la page S.V.P

3. On pose :

$$\begin{pmatrix} \phi_0(t) \\ \phi_1(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} f_0(t) \\ f_1(t) \end{pmatrix}$$

Justifier la relation :

$$\begin{pmatrix} \phi_0'(t) \\ \phi_1'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} f_0'(t) \\ f_1'(t) \end{pmatrix}$$

En déduire, à une constante multiplicative près, $\phi_0(t)$ et $\phi_1(t)$, puis déterminer $f_0(t)$ et $f_1(t)$

4. A l'aide de ce qui précède expliciter $X(t,2)$ en fonction de t et de λ.

C : DEUXIEME CAS PARTICULIER

Dans cette partie on suppose que tous les μ_i sont nuls (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rémission possible) et que l'on a pour tout i $(1 \leq i \leq n)$: $\lambda_i = i \times \lambda$, où λ désigne un réel strictement positif.

1. Déterminer f_0 ;

2. Pour tout i $(0 \leq i \leq n-1)$ et tout t réel positif, on pose :

$$g_i(t) = f_i(t) \times \exp((i+1)\lambda t))$$

2.a. Déterminer g_1.

2.b. Exprimer, pour i non nul, $g_i'(t)$ en fonction de i, λ et $g_{i-1}(t)$. Calculer $g_i(0)$.

2.c Montrer, en utilisant une récurrence, que l'on a, pour tout i $(1 \leq i \leq n-1)$ et tout t réel positif :

$$g_i(t) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} C_i^k \exp(k\lambda t)$$

3. Déduire de ce qui précède $X(t,n)$ ainsi qu'un équivalent de $1 - X(t,n)$ lorsque t tend vers l'infini.