Banque <<Agro>>
A et **AE - 0601**

MATHÉMATIQUES
Épreuve B
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage de la calculatrice est interdit pour cette épreuve

La partie II utilise les notations de la partie I. Les graphes demandés sont sommaires et doivent être réalisés à même la copie.

L'objet du problème est l'étude de variables aléatoires réelles, fonctions d'une variable aléatoire T de loi uniforme sur $]0,1[$, (de densité $f_T = 1$ sur $]0,1[$, et 0 ailleurs), en privilégiant l'aspect géométrique élémentaire de ces fonctions.

Rappels et Notations.

Les variables aléatoires seront notées avec des majuscules d'imprimerie $(A, B, \dots Z)$.

Si A est une variable aléatoire admettant une densité, on notera f_A une de ses densités et F_A sa fonction de répartition. On rappelle que F_A est définie par

$$\forall a \in \mathbb{R}\ ,\quad F_A(a) = P[A \leq a] = \int_{-\infty}^{a} f_A(t)dt$$

et que $F'_A(a) = f_A(a)$ en tout point a où f_A est continue.

Si A et B sont deux variables aléatoires, on notera $F_{A,B}$ la fonction de répartition du couple (A, B) définie par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ F_{A,B}(a,b) = P([A \leq a] \cap [B \leq b])$$

On notera enfin, sous réserve d'existence, $E(A)$, respectivement $V(A)$ et $Cov(A,B)$, l'espérance de A, respectivement la variance de A et la covariance de (A,B).

PARTIE I.

I.1.a. Rappeler les valeurs prises par F_T ainsi que $E(T)$ et $V(T)$.

I.1.b. Dans la suite du problème on note U la variable aléatoire $1-T$. Déterminer F_U, f_U, $E(U)$ et $V(U)$.

I.1.c. Représenter dans le repère (O,t,u) le graphe de la fonction définie sur $]0,1[$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à t associe $1-t$ et en étudiant l'intersection de ce graphe avec la droite d'équation $u = u_0$, retrouver F_U.

T.S.V.P

Notation
Dans la suite du problème on note X la variable aléatoire $X = \inf(T, U)$ et Y la variable aléatoire $Y = \sup(T, U)$.

I.2.a Montrer que pour tout y appartenant à $\mathbb{R}$, on a : $F_Y(y) = P([1 - y \leq T] \cap [T \leq y])$ et en déduire les expressions de F_Y et f_Y sur chacun des intervalles $]-\infty, \frac{1}{2}[$, $]\frac{1}{2}, 1[$ et $]1, \infty[$.

I.2.b Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, déterminer $P[X > x]$ puis les expressions de F_X et f_X sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, \infty[$.

I.2.c. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ et expliquer d'une phrase pourquoi $V(X) = V(Y)$.

I.3.a. Représenter dans le repère (O, t, x) le graphe de la fonction définie sur $]0, 1[$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à t associe $\inf(t, 1 - t)$ puis étudier l'intersection de ce graphe avec la droite d'équation $x = x_0$ afin de retrouver F_X.
I.3.b. Retrouver F_Y par le même procédé.

I.3.c. Déterminer le coefficient de corrélation $R_{X,Y}$ et en déduire $Cov(X, Y)$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes?

I.4. Dans cette question on se propose de déterminer et d'illustrer graphiquement $F_{T,U}$.

I.4.a. Montrer que pour tout couple de réels (t, u) vérifiant $t \leq 0$, ou $u \leq 0$, ou $t+u-1 < 0$, on a :

$$F_{T,U}(t, u) = 0.$$

I.4.b. Montrer que pour tout couple de réels (t, u) vérifiant $t \geq 1$, et $u \geq 1$, on a :

$$F_{T,U}(t, u) = 1.$$

I.4.c. Pour tout couple de réels (t, u) vérifiant $t \geq 1$ et $u \in]0, 1[$, déterminer $F_{T,U}(t, u)$.

I.4.d. Déterminer $F_{T,U}(t, u)$ dans les deux cas restants.

I.4.e. Représenter dans le plan (O, t, u) les régions du plan définies par $F_{T,U}(t, u) = 0$ et $F_{T,U}(t, u) = 1$ ainsi que les lignes de niveaux $F_{T,U} = \frac{1}{4}$, $F_{T,U} = \frac{1}{2}$, et $F_{T,U} = \frac{3}{4}$.
Indication : On pourra faire apparaître les régions du plan limitées par les droites d'équations

$$t = 0,\ u = 0,\ t = 1,\ u = 1,\ t + u - 1 = 0.$$

PARTIE II.

On considère les variables aléatoires $D = \frac{X}{Y}$, $M = X.Y$, $Z = X^2 + Y^2$ et $S = Y - X$.

II.1.a. Montrer que D est compris entre 0 et 1, en déduire que $P[D \leq d] = 0$ si $d \leq 0$ et $P[D \leq d] = 1$ si $d \geq 1$.
II.1.b. Soit d un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que si $T \leq \frac{1}{2}$ alors $D = \frac{T}{1-T}$ et si $T \geq \frac{1}{2}$ alors $D = \frac{1-T}{T}$.

En déduire que

$$P[D \leq d] = P[\frac{T}{1-T} \leq d] + P[\frac{1-T}{T} \leq d]$$

puis que $F_D(d) = 2\frac{d}{1+d}$.

II.1.c. En déduire les expressions de F_D, f_D, puis les valeurs de $E(D)$ et $V(D)$.
Indication : On pourra calculer $E((D+1)^2)$ et en déduire $E(D^2)$.

II.2.a. Exprimer M en fonction de T. En déduire que pour tout m réel, on a :

$$F_M(m) = P[T(1-T) \leq m].$$

II.2.b. Etudier la fonction définie sur $]0,1[$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à t associe $t(1-t)$, puis montrer que :

$$F_M(m) = 0 \text{ si } m \leq 0 \text{ , } F_M(m) = 1 - \sqrt{1-4m} \text{ si } 0 < m < \frac{1}{4} \text{ et } F_M(m) = 1 \text{ si } m \geq \frac{1}{4}$$

II.2.c. En déduire les valeurs prises par f_M, puis justifier l'existence et donner les valeurs de $E(M)$ et $V(M)$.
Indication : On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{1-4m}$.

II.3.a. Exprimer $Z = X^2 + Y^2$ en fonction de T; étudier la fonction définie sur $]0,1[$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à t associe $2t^2 - 2t + 1$ et en déduire que

$$Fz(z) = 0 \text{ si } z \leq \frac{1}{2} \text{ ,} Fz(z) = \sqrt{2z-1} \text{ si } \frac{1}{2} < z < 1 \text{ et } Fz(z) = 1 \text{ si } z \geq 1$$

II.3.b. En déduire les valeurs prises par f_Z, puis justifier l'existence et donner les valeurs de $E(Z)$ et $V(Z)$.

II.3.c. Exprimer Z en fonction de M et retrouver les résultats de la question II.3.b.

II.4.a. Montrer que $S = Y - X = |2T - 1|$ et par une étude similaire à celle des questions II.2.b. et II.3.a., déterminer F_S, f_S, $E(S)$ et $V(S)$.

II.4.b. Déterminer la probabilité de l'évènement $[M > S]$.

FIN