❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit

A rendre avec la copie :

3 feuilles de papier millimétré.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans tout ce problème, le corps de base est celui des nombres réels.
Le plan euclidien orienté usuel $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$.
M et M' désignant deux points quelconques du plan, leur distance euclidienne est notée MM'.

Notations

Soit Γ un arc birégulier du plan $\mathcal{P}$.
On notera $\left(M(t)\ ;\ \overrightarrow{T(t)},\ \overrightarrow{N(t)}\right)$ le repère de Frenet de l'arc Γ au point $M(t)$.
L'arc Γ étant paramétré par l'abscisse curviligne : $s \longmapsto M(s)$

1. la courbure de Γ au point $M(s)$ sera notée $\gamma(s)$;
2. le rayon de courbure de Γ au point $M(s)$ est le réel $R(s) = \dfrac{1}{\gamma(s)}$;
3. le centre de courbure de Γ au point M est le point I, défini par : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R \cdot \overrightarrow{N}$.

On rappelle les formules de Frenet :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma \cdot \overrightarrow{N} \quad ; \quad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma \cdot \overrightarrow{T}.$$

Les trois parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A

Soient F et F' les deux points du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $(\sqrt{5},\ 0)$ et $(-\sqrt{5},\ 0)$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 6$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$? Précisez ses éléments caractéristiques.
2. Former une équation cartésienne (sans radicaux) de $\mathcal{E}$.
   On choisit désormais de considérer le paramétrage de $\mathcal{E}$ défini sur $[0,\ 2\pi[$ par :
   $$x(t) = 3\cos t \quad ; \quad y(t) = 2\sin t.$$
3. Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.
4. En déduire les coordonnées du centre de courbure de $\mathcal{E}$ associé au point $M(t)$.
5. On désigne par Γ l'arc paramétré comme suit :
   $$\begin{cases} x(t) = \dfrac{5}{3}\cos^3 t \\ y(t) = -\dfrac{5}{2}\sin^3 t \end{cases}$$
   Γ' est l'arc de Γ correspondant à $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   En étudiant les fonctions x et y, construire avec soin Γ' ; on précisera les tangentes aux extrémités de Γ'.
6. Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de Γ de celle de Γ' ? Construire Γ sur la même figure.
7. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ intérieure à la courbe fermée Γ.
8. Calculer la longueur de l'arc Γ' puis celle de l'arc Γ

PARTIE B

Soient F et F' les deux points du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $(1,\ 0)$ et $(-1,\ 0)$. On considère l'arc paramétré $\mathcal{C}$ ayant pour équation polaire :

$$\rho(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

On oriente $\mathcal{C}$ dans le sens des θ croissants et on prend pour origine des arcs le point A de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{2},\ 0)$.

1. Étudier ρ et construire avec soin $\mathcal{C}$. On précisera notamment les tangentes aux points de paramètres 0 et $\dfrac{\pi}{4}$. (unité graphique : 4 cm)
2. Soit M un point de $\mathcal{C}$, montrer que $MF \cdot MF' = 1$.

3. On désigne par $\mathcal{C}'$ l'arc paramétré comme suit :

$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\cos^3\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \\ y(\theta) = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sin^3\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \end{array}\right. \qquad \theta \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[.$$

Étudier les fonctions x et y, préciser l'allure de la branche infinie de l'arc $\mathcal{C}'$ puis le construire sur la même figure que $\mathcal{C}$.

4. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par $\mathcal{C}$ et le segment $[0A]$.

PARTIE C

Dans cette partie, on désigne par F et F' les points du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $(1,\ 0)$ et $(-1,\ 0)$.
k désignant un réel strictement positif, on note Γ_k l'ensemble des points M du plan tels que

$$MF \cdot MF' = k.$$

1. Former une équation cartésienne de Γ_k (on éliminera les radicaux).
2. Déterminer le nombre de points d'intersection de Γ_k avec l'axe des abscisses.
3. Soit M un point quelconque du plan.
   (a) Montrer que : $MF^2 + MF'^2 = 2OM^2 + OF^2 + OF'^2$.
   (b) Montrer que : $MF^2 + MF'^2 = (MF - MF')^2 + 2MF \cdot MF'$.
   (c) En déduire que pour tout point M de Γ_k on a : $OM^2 \leq 1 + k$.
4. Déterminer les éléments de symétrie de Γ_k.
5. On désigne par $\mathcal{C}_k$ l'arc de Γ_k situé dans le quart de plan $x \geq 0$; $y \geq 0$.
   Montrer que la courbe $\mathcal{C}_k$ admet une équation cartésienne de la forme $y = \varphi_k(x)$, où φ_k désigne une fonction de la variable réelle positive que l'on déterminera.
6. On se propose d'étudier la fonction définie par

$$f_k : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\sqrt{4x^2+k^2} - (x^2+1)} \end{array}\right.$$

   (a) Déterminer le domaine de définition D_k de la fonction proposée.
   (b) Déterminer la dérivée f_k' de f_k. Étudier la dérivabilité de f_k aux bornes de D_k.
   (c) Étudier le signe de f_k'.
   (d) Dresser le tableau de variation de f_k.
7. Tracer avec soin les courbes Γ_k pour $k = \dfrac{1}{2}$, $k = \dfrac{3}{2}$ et $k = 2$.