Mines PSI 2

Fonctions d'endomorphismes

Dans ce texte, on note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.
Pour tout entier $n > 0$ on note $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$; l'identité de $\mathcal{L}_n$ est notée I. Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ est noté (x, y) et la norme associée $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Si $S \in \mathcal{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de S est noté $\sigma(S)$. On définit la fonction Q_S sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$Q_s(x) = \frac{(S(x), x)}{\|x\|^2} \tag{1}$$

C'est le quotient de Rayleigh de S.
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$. Si $T \in \mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(T)$ et $M(T)$ le minimum et le maximum de $\sigma(T)$. On dit que $T \in \mathcal{S}_n$ est un endomorphisme positif (resp. strictement positif) si $\forall x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$, on a $(Tx, x) \geq 0$ (resp. > 0). L'ensemble des endomorphismes positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{++}$).

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques.

Dans cette partie on considère $T \in \mathcal{S}_n$.

Q.1. Soient T_1 et T_2 appartenant à $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$.

Q.2. Montrer que $Q_T\ :\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ atteint les valeurs $m(T)$ et $M(T)$.

Q.3. Démontrer que l'on a

$$m(T) = \min_{x\neq 0} Q_T(x) \quad \text{et} \quad M(T) = \max_{x\neq 0} Q_T(x)$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T.

Q.4. Montrer que $T \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $T \in \mathcal{S}_n^{++}$ si et seulement si $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}^{+*}$).

Soit J un intervalle contenant $\sigma(T)$ et f une fonction définie sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Q.5. Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire U telle que

$$\forall \lambda \in \sigma(T),\ \forall y \in \ker(T - \lambda I),\ U(y) = f(\lambda)y \tag{3}$$

et que $U \in \mathcal{S}_n$.

On notera $U = f(T)$ l'endomorphisme symétrique ainsi défini, ce qui conduit à considérer f comme une application de $\mathcal{S}_n$ dans lui même.

Q.6. Soit p la restriction à J d'une fonction polynomiale à coefficients réels. On note $p(t) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^j$, avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ pour $j \in \{0, \ldots, k\}$. Démontrer que l'endomorphisme symétrique $p(T)$ est égal à $\alpha_0 I + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j T^j$ où$T^j = T \circ \cdots \circ T$ (j fois).

Q.7. Y-a-t-il des fonctions $g\ :\ J \to \mathbb{R}$ telles que $g(T)$ ne soit pas égal à un polynôme en T ?

Q.8. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $f(T)$ en fonction de ceux de T.

Q.9. Pour des fonctions f et g définies sur l'intervalle J, démontrer que $(fg)(T) = f(T) \circ g(T)$.

Q.10. On considère $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t}$. Montrer que $f(S) = S^{-1}$ (inverse de l'endomorphisme S).

Q.11. On considère $S \in \mathcal{S}_n^+$. Lorsque $f(t) = \sqrt{t}$, on note $\sqrt{S}$ l'endomorphisme $f(S)$. Montrer que $\sqrt{S}$ est bien défini et que $(\sqrt{S})^2 = S$. En admettant que toutes les valeurs propres de S sont simples, combien y-a-t-il de solutions C dans $\mathcal{S}_n^+$ puis dans $\mathcal{S}_n$ à l'équation $C^2 = S$?

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$.

Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. On note $T_2 \geq T_1$ si et seulement si $T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_n^+$.

Q.12. Démontrer que la relation $\geq$ définit une relation d'ordre dans $\mathcal{S}_n$. Est-elle totale ?

Q.13. Soit $U \in \mathcal{S}_n$. Démontrer que si $T_2 \geq T_1$ alors $U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U$.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction $f : J \to \mathbb{R}$ définit un opérateur croissant si pour tous T_1, T_2 endomorphismes symétriques vérifiant $\sigma(T_1) \subset J$ et $\sigma(T_2) \subset J$ on a

$$T_2 \geq T_1 \Rightarrow f(T_2) \geq f(T_1)$$

Q.14. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = t^2$ ne définit pas un opérateur croissant.
On pourra, à cet effet, considérer les endomorphisme T_1 et T_2 canoniquement associés à

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Q.15. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n^{++}$ tels que $T_2 \geq T_1$. En s'aidant de la question **13** avec $U = T_2^{-1/2}$, montrer que les valeurs propres de $U \circ T_1 \circ U$ sont inférieures ou égales à 1. En déduire $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I$ puis, que l'application $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = -1/t$ définit un opérateur croissant.

Q.16. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n^+$ tels que $T_2 \geq T_1$. Démontrer que les valeurs propres de $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ sont positives. En déduire que l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = \sqrt{t}$ définit un opérateur croissant.

3 Inégalité de Löwner-Heinz.

On va montrer que pour tout $a \in]0, 1[$, la fonction $\varphi_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(t) = t^a$ définit un opérateur croissant. Pour $u \in \mathbb{R}^+$, on note $f_u : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f_u(t) = \frac{t}{t+u}$$

Q.17. Démontrer que f_u définit un opérateur croissant. *On pourra s'aider de la question* **15.**

Soient φ une application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $\Phi(s)$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi(s)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(\Phi(s)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les coefficients de $\Phi(s)$. On dira que φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ si les fonctions coordonnées $s \mapsto \Phi(s)_{i,j}$ le sont. Par définition, on notera $\int_0^{+\infty} \varphi(s)\, ds$ l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ a pour coefficients les $\int_0^{+\infty} \Phi(s)_{i,j}\, ds$. Cette matrice sera notée $\int_0^{+\infty} \Phi(s)\, ds$.

Q.18. Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.

On considère $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $a \in]0, 1[$.

Q.19. Montrer que la fonction φ à valeurs dans $\mathcal{L}_n$ définie par $\varphi(u) = f_u(S)u^{a-1}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. *On pourra trouver utile de faire appel à une base orthonormée adaptée à S.*

On admet que

$$t^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(t) u^{a-1}\, du \tag{6}$$

Q.20. Montrer que

$$S^a = \frac{\sin(a\pi)}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(S) u^{a-1}\, du \tag{7}$$

Q.21. En déduire que la fonction φ_a définit un opérateur croissant.