Le problème porte sur l'étude des équations qui régissent le mouvement d'une particule d'une fibre dans un fluide lui-même en mouvement.
Dans tout ce problème, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, sa base canonique B_0 est notée $\{\vec{e_i}\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ et le repère associé est (O, B_0).
Le produit scalaire de deux éléments $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et la norme d'un élément $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$.

Première partie

Soit $\vec{f} : t \mapsto \vec{F}(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et a un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. On considère le système différentiel suivant :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}t} = a(\vec{F}) \tag{E}$$
   (a) Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de (E) vérifiant une condition du type $\vec{F}(t_0) = \vec{F_0}$ où t_0 et $\vec{F_0}$ sont fixés ?
   (b) Soit $\vec{F}$ une solution de (E). Montrer alors que s'il existe un réel t_0 tel que $\vec{F}(t_0) = \vec{0}$, $\vec{F}$ est la fonction nulle.

Dans la suite, on supposera toujours que $\vec{F}$ ne s'annule pas.

2. On définit alors les fonctions $\nu : t \mapsto \|\vec{F}(t)\|$ et $\vec{f} : t \mapsto \frac{1}{\nu(t)}\vec{F}(t)$
   (a) Montrer que ν et $\vec{f}$ sont des fonctions dérivables.
   (b) Vérifier alors que $\vec{f(t)}$ et $\vec{f'(t)}$ sont deux vecteurs orthogonaux pour tout réel t.
   (c) Calculer la dérivée de ν.
3. Montrer que si $\vec{F}$ vérifie le système (E), la fonction vectorielle $\vec{f}$ vérifie le système différentiel :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t} = a(\vec{f}) - (a(\vec{f})\cdot\vec{f})\vec{f} \tag{e}$$

Deuxième partie

Soient deux réels $\lambda \in]-1, 1[$ et $G > 0$. On pose $r = \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}$.
Dans la suite du problème, a est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B_0 est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & G.(\lambda-1) & 0 \\ G.(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
On cherche $\vec{F}$ la solution de (E) vérifiant la condition initiale $\vec{F}(0) = x_0\vec{e_1} + y_0\vec{e_2} + z_0\vec{e_3}$.
On pose $\vec{F}(t) = x(t)\vec{e_1} + y(t)\vec{e_2} + z(t)\vec{e_3}$.

1. (a) Donner l'expression de $z(t)$.
   (b) Intégrer (E) lorsque $x_0 = y_0 = 0$.
2. Montrer que $r^2x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0$ pour tout réel t. Que peut-on en déduire pour les courbes intégrales de (E) ?
3. On pose $\omega = G.\sqrt{1-\lambda^2}$.
   (a) Vérifier que x et y sont solutions de l'équation différentielle
$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 u = 0.$$
   (b) Intégrer alors (E) lorsque $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.
   (c) On suppose dans cette question que $x_0 \neq 0$. Vérifier qu'il existe une constante t_0 (à définir en fonction de x_0, y_0, r et ω) telle que :
$$\frac{y(t)}{x(t)} = r\tan\omega(t-t_0)$$
   lorsque t est au voisinage de 0.

Troisième partie

Soit $\vec{F}$ une solution de (E) ne s'annulant pas et $\vec{f}$ la fonction vectorielle unitaire associée, c'est-à-dire $\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\|\vec{F}\|}$.

On pose $\vec{f(t)} = \sin\theta(t)\cos\phi(t)\vec{e_1} + \sin\theta(t)\sin\phi(t)\vec{e_2} + \cos\theta(t)\vec{e_3}$ où θ et ϕ sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Les valeurs de $\vec{f}, \theta$ et ϕ en 0 seront notées f_0, θ_0 et ϕ_0.

1. (a) Illustrer par une figure la définition de $\theta(t)$ et $\phi(t)$.
   (b) Prouver que s'il existe t_0 tel que $\sin\theta(t_0) = 0$, alors $\sin\theta$ est la fonction identiquement nulle.
   (c) Prouver que s'il existe t_0 tel que $\cos\theta(t_0) = 0$, alors $\cos\theta$ est la fonction identiquement nulle.
   (d) Démontrer que s'il existe t_0 tel que $\sin 2\theta(t_0) = 0$, θ est une fonction constante.

2. Soient $\vec{u(t)} = \cos\phi(t)\vec{e_1} + \sin\phi(t)\vec{e_2}$ et $\vec{v(t)}$ le vecteur tel que $B_\phi(t) = (\vec{u(t)}, \vec{v(t)}, \vec{e_3})$ soit une base orthonormale directe.

   (a) Écrire $\vec{f'(t)}$ dans la base $B_\phi(t)$ en fonction de $\theta(t), \phi(t), \theta'(t)$ et $\phi'(t)$.
   (b) Donner la matrice $A_\phi(t)$ de a dans la base $B_\phi(t)$.
   (c) Calculer $a(\vec{f(t)}).\vec{f(t)}$

3. (a) Écrire la système différentiel (S) vérifié par θ et ϕ équivalent à (e).
   (b) Prouver que si $\vec{f_0}$ et $\vec{e_3}$ ne sont pas colinéaires, le système (S) équivaut à :
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 2G\lambda\cos^2\phi + G(1-\lambda) \qquad (1)$$
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 2G\lambda\sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta \qquad (2)$$

4. Intégrer (S) lorsque $\lambda = 0$ et donner la trajectoire du point m défini par $\overrightarrow{Om(t)} = \vec{f(t)}$.

5. On suppose maintenant que λ est non nul.

   (a) Prouver que toute solution φ de (1) est strictement monotone et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que θ reste constant le long d'une courbe intégrale si et seulement si $\sin 2\theta_0 = 0$.
   (c) Lorsque $\sin 2\theta_0 \neq 0$, montrer que (2) s'intègre à l'aide de (1) en :
$$\tan\theta = \frac{C}{\sqrt{\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi}}$$
   où C est une constante.

6. On désigne par $\mathcal{C}_\lambda$ l'ensemble des courbes intégrales de (1) et par ϕ_1 une solution de (1).

   (a) Soit un réel t_1. Montrer que $\phi_2 : t \mapsto \phi_1(t - t_1)$ est aussi solution de (1). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.
   (b) Montrer que $\phi_3 : t \mapsto -\phi_1(-t)$ est aussi solution de (1). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble $\mathcal{C}_\lambda$.
   (c) Montrer que $\phi_4 : t \mapsto \frac{\pi}{2} - \phi_1(-t)$ est solution de l'équation (1) associée au paramètre λ.
   Comment déduit-on $\mathcal{C}_{-\lambda}$ de $\mathcal{C}_\lambda$?

7. On définit, pour tout entier relatif k, le réel t_k par $\phi(t_k) = k\pi + \frac{\pi}{2}$

   (a) Pour intégrer (1) sur $]t_k, t_{k+1}[$, effectuer le changement de variables $u = \tan\phi$ et $t = \tau(u)$.
   (b) Montrer que la nouvelle équation obtenue s'intègre en :
$$\tau(u) = \frac{1}{Gr(1-\lambda)}\arctan\frac{u}{r} + \tau_k$$
   où τ_k est une constante que l'on déterminera.
   (c) Retrouver alors sans utiliser la deuxième partie que $\vec{f}$ est une fonction périodique de période $T = \frac{\pi}{G}(r + \frac{1}{r}) = \frac{2\pi}{\omega}$