❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Ce problème provient de l'étude du phénomène de cavitation (c'est-à-dire de la formation d'une cavité) à l'intérieur d'une boule remplie d'un matériau incompressible et soumise à certains types d'effort.

On sera amené à considérer une application f de $\mathbb{R}^3$ privé de $O = (0,0,0)$ dans lui-même et à étudier quelques propriétés faisant intervenir la matrice jacobienne de f.

Notations:

$B_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$	: base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne,
(O, B_0)	: repère canonique de $\mathbb{R}^3$,
E	: $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine $O = (0,0,0)$,
$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	: matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,
$\mathcal{F}$	: ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,
$\mathcal{F}^+$	: ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.

Rappel d'une formule de calcul d'une intégrale de surface:
Soit Σ une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $(u,v) \mapsto P(u,v)$, où (u,v) décrit une partie D de $\mathbb{R}^2$ suffisamment régulière. Soit f une fonction continue définie sur Σ. Le calcul de l'intégrale de f sur la surface Σ peut être obtenu par la formule suivante:

$$\iint_\Sigma f(P)\, d\sigma = \iint_D f(P(u,v)) \left\| \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial v} \right\| du\, dv\ .$$

I. Première partie

1. Soit $m = (x_1, x_2, x_3)$ un élément de E. On rappelle qu'il existe au moins un triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ formant un système de coordonnées sphériques de m, c'est-à-dire vérifiant:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi\,, \quad x_2 = r \sin\theta \sin\varphi\,, \quad x_3 = r\cos\theta.$$

   a. On pose alors pour tout triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$:
   $$\begin{aligned} \overrightarrow{e_r} &= \sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_1} + \sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_2} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_3}\,, \\ \overrightarrow{e_\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_1} + \cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_2} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_3}\,, \\ \overrightarrow{e_\varphi} &= -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_1} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_2}\,. \end{aligned}$$
   Vérifier que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$.

   b. Lorsque m est un élément de E tel que $x_1x_2x_3 \neq 0$, représenter sur un dessin r, θ, φ, $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.

2. L'application f de E dans lui-même est définie par la relation:

$$\overrightarrow{Of(m)} = \frac{\rho(r)}{r}\,\overrightarrow{Om}\,,$$

   où ρ est un élément de $\mathcal{F}^+$.
   Soit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui associe à t le triplet $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$. Soit $m(t)$ le point de coordonnées sphériques $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ et $M(t) = f(m(t))$ son image par f.

   a. Donner les composantes dans la base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{v(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{Om(t)}}{dt}$, notées (v_1, v_2, v_3), et celles de $\overrightarrow{V(t)} = \dfrac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}$, notées (V_1, V_2, V_3).

   b. Prouver que <u>l'unique</u> matrice J indépendante de la fonction $t \mapsto (r(t), \theta(t), \varphi(t))$ telle que
   $$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
   est la matrice $\mathrm{Diag}\left(\rho'(r), \dfrac{\rho(r)}{r}, \dfrac{\rho(r)}{r}\right)$.

3. On admet que l'incompressibilité du matériau se traduit par $\det J = 1$ pour tout élément m de E. Montrer que cette condition est réalisée si, et seulement si, il existe un réel a positif ou nul tel que pour tout réel $r > 0$, on ait la relation $\rho(r)^3 = r^3 + a^3$.

4. Soit f_a l'application associée à la fonction ρ_a définie par $\rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$.
   L'application f_a est-elle injective?
   L'application f_a est-elle surjective? Lorsque f_a n'est pas surjective, préciser le sous-ensemble de E qui n'est pas dans l'image de f; dans ce cas, on dit que se produit le phénomène de cavitation.
   L'application f_a peut-elle être prolongée par continuité en $O = (0, 0, 0)$?

II. Deuxième partie

L'application étudiée f de E dans lui-même, $m = (x_1, x_2, x_3) \mapsto M = (X_1, X_2, X_3)$, est dorénavant donnée par $X_i = \psi_i(r)\, x_i$ pour $1 \leq i \leq 3$, où r désigne $\|\overrightarrow{Om}\|$ et où les fonctions ψ_i sont des éléments de $\mathcal{F}^+$. Dans une telle situation, on dit que la déformation est triaxiale.

1. a. Ecrire la matrice jacobienne J_0 de l'application f.

   b. Montrer que, lorsque α, β et γ sont des réels, on a, pour tout triplet $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3})$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$, la relation:

$$\alpha^2 \det(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}) = \det(\overrightarrow{V_1}, \alpha\overrightarrow{V_2} - \beta\overrightarrow{V_1}, \alpha\overrightarrow{V_3} - \gamma\overrightarrow{V_1}).$$

   Pour $x_1 \neq 0$, en déduire l'égalité:

$$\det(J_0) = \frac{1}{x_1^2}\begin{vmatrix} \psi_1'(r)\dfrac{x_1^2}{r} + \psi_1(r) & -x_2\psi_1(r) & -x_3\psi_1(r) \\ \psi_2'(r)\dfrac{x_1x_2}{r} & x_1\psi_2(r) & 0 \\ \psi_3'(r)\dfrac{x_1x_3}{r} & 0 & x_1\psi_3(r) \end{vmatrix}$$

   c. Calculer $\det(J_0)$ pour m tel que x_1 est non nul, puis pour tout élément m de E.

2. L'incompressibilité s'exprimant toujours par la relation $\det(J_0) = 1$ en tout m de E, montrer que cette condition est réalisée si et seulement si ψ_1, ψ_2 et ψ_3 vérifient pour tout réel $r > 0$ les trois conditions suivantes:

$$\psi_1'(r)\psi_3(r) - \psi_1(r)\psi_3'(r) = 0, \qquad (C_1)$$
$$\psi_2'(r)\psi_3(r) - \psi_2(r)\psi_3'(r) = 0, \qquad (C_2)$$
$$\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3(r) + r\psi_1(r)\psi_2(r)\psi_3'(r) = 1. \qquad (C_3)$$

3. On suppose ces trois conditions C_1, C_2 et C_3 réalisées.

   a. Montrer l'existence de deux réels λ et μ strictement positifs tels que $\psi_1 = \lambda\,\psi_3$ et $\psi_2 = \mu\,\psi_3$.

   b. On note Z la fonction $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3$, élément de $\mathcal{F}^+$.
   Calculer $rZ'(r) + 3Z(r)$ et en déduire Z.

4. Montrer que ψ_1, ψ_2 et ψ_3 sont des éléments de $\mathcal{F}^+$ réalisant les conditions C_1, C_2 et C_3 si, et seulement si, il existe un réel $a \geq 0$ et trois réels α_1, α_2 et α_3 strictement positifs tels que les relations suivantes soient vérifiées:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1 \text{ et, pour tout } i,\ 1 \leq i \leq 3, \quad \psi_i(r) = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r}.$$

   Vérifier que la transformation f_a étudiée dans la première partie est la forme prise par la déformation triaxiale dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

III. Troisième partie

Soit ψ l'élément de $\mathcal{F}^+$ défini par $\psi(r) = \dfrac{\sqrt[3]{r^3+a^3}}{r}$ où a est un paramètre réel strictement positif. Soit c un second paramètre réel strictement positif. On choisit les fonctions ψ_i définissant l'application f sous la forme $\psi_1 = c^{-2}\psi$ et $\psi_2 = \psi_3 = c\,\psi$.

1. Soit Σ l'image de la sphère unité $\{m, ||\overrightarrow{Om}|| = 1\}$ par l'application f.

   a. Donner une équation cartésienne de Σ et préciser sa nature géométrique.

   b. Montrer que les relations:

   $$X_1 = \frac{b}{c^2}\cos\varphi\,, \quad X_2 = b\,c\sin\varphi\cos\theta\,, \quad X_3 = b\,c\sin\varphi\sin\theta,$$

   avec $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et $b = \psi(1)$, constituent une paramétrisation de Σ.

   c. Calculer le vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n(M)}$ en M à Σ tel que $\overrightarrow{n(M)}\,.\,\overrightarrow{Om}$ est strictement positif.

2. Soient t_1 et t_2 deux réels. On définit alors en tout point M de Σ les vecteurs suivants:
$\overrightarrow{g(M)} = \dfrac{t_2 - 2t_1}{3}\left(\overrightarrow{n(M)}\,.\,\overrightarrow{e_1}\right)\overrightarrow{e_1} + \dfrac{t_1+t_2}{3}\left(\left(\overrightarrow{n(M)}\,.\,\overrightarrow{e_2}\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\overrightarrow{n(M)}\,.\,\overrightarrow{e_3}\right)\overrightarrow{e_3}\right),$
$\overrightarrow{V_1(M)} = \dfrac{\partial\overrightarrow{Om}}{\partial c}$ et $\overrightarrow{V_2(M)} = \dfrac{\partial\overrightarrow{Om}}{\partial a}$.

   a. Calculer $\overrightarrow{V_1(M)}$ et $\overrightarrow{V_2(M)}$.

   b. Vérifier les égalités suivantes:

   $$\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)}\,.\,\overrightarrow{V_1(M)}\,d\sigma = \frac{8\pi b^3}{3c}\,t_1 \quad \text{et} \quad \iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)}\,.\,\overrightarrow{V_2(M)}\,d\sigma = \frac{4\pi a^2}{3}\,t_2\,.$$

3. Soit l'application W de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation:

   $$W(c,a) = \frac{4\pi}{3}(2c^2 + c^{-4})(1+2a^3)(1+a^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

   a. Donner t_1 et t_2 en fonction de a pour que $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)}\,.\,\overrightarrow{V_1(M)}\,d\sigma = \frac{\partial W(a,c)}{\partial c}$ et $\displaystyle\iint_\Sigma \overrightarrow{g(M)}\,.\,\overrightarrow{V_2(M)}\,d\sigma = \frac{\partial W(a,c)}{\partial a}$.

   b. Montrer que chacune des valeurs précédentes des deux dérivées partielles de W a une limite lorsque a tend vers 0 et préciser ces deux limites.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe plane, paramétrée par $c \in \mathbb{R}_+^*$, définie par:

   $$x(c) = 2\,(c^2 - c^{-4})\,, \quad y(c) = 5\,(2c^2 + c^{-4})\,.$$

   a. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}$ d'ordonnée minimale et préciser ses coordonnées.

   b. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en précisant ses éventuelles asymptotes.

   c. La courbe $\mathcal{C}$ est-elle une conique ou est-elle contenue dans une conique?

IV. Quatrième partie

Soit W une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$:$(I_1, I_2) \mapsto W(I_1, I_2)$ et soient trois fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 de $\mathcal{F}^+$.
On pose $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2$ et on note W_1 la fonction composée telle que $W_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = W(I_1, I_2)$.
On introduit alors, pour $1 \leq i \leq 3$, les fonctions s_i de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par les relations:

$$\forall R > 0,\ s_i(R) = \lambda_i(R)\ \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_i}\Big(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)\Big) - h(R)\,,$$

où h est un élément de $\mathcal{F}$. Le nombre a étant un réel strictement positif, les conditions mécaniques sont complètement décrites par le système suivant:

$$\begin{aligned} s_1'(R) + \frac{2}{R}(s_1(R) - s_2(R)) &= 0\,, \\ s_2(R) &= s_3(R)\,, \\ s_1(a) &= 0\,. \end{aligned}$$

Enfin, on pose $P(a) = s_1(b)$, $\rho_a(r) = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$ et $b = \rho_a(1)$.

1. Prouver rapidement que les fonctions s_i sont éléments de $\mathcal{F}$ et vérifier l'égalité suivante:

$$P(a) = \int_a^b \frac{2}{R}\left[\lambda_2(R)\ \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}\Big(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)\Big) - \lambda_1(R)\ \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}\Big(\lambda_1(R), \lambda_2(R), \lambda_3(R)\Big)\right] dR\,.$$

2. On pose $r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}$, $\lambda_1 = \rho_a'(r)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{\rho_a(r)}{r}$ et $v = \dfrac{R}{r} = \dfrac{\rho_a(r)}{r}$.
Les expressions de $\lambda_1(R)$, $\lambda_2(R)$, $\lambda_3(R)$, $I_1(R)$ et $I_2(R)$ en fonction de v sont notées respectivement $\mu_1(v)$, $\mu_2(v)$, $\mu_3(v)$, $J_1(v)$ et $J_2(v)$. On désigne par Φ la fonction de $\mathcal{F}$ définie par $\Phi(v) = W\Big(J_1(v), J_2(v)\Big) = W_1\Big(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)\Big)$.

   a. Après avoir montré que $\mu_1(v)$, $\mu_2(v)$ et $\mu_3(v)$ sont des puissances entières positives ou négatives de v, vérifier la relation:

   $$\Phi'(v) = \frac{2}{v}\left[\mu_2(v)\ \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}\Big(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)\Big) - \mu_1(v)\ \frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}\Big(\mu_1(v), \mu_2(v), \mu_3(v)\Big)\right]\,.$$

   b. En déduire la relation:

   $$P(a) = \int_b^{+\infty} \frac{\Phi'(v)}{v^3 - 1}\, dv\,,\ \text{avec } b = \sqrt[3]{1 + a^3}\,.$$

   c. Montrer alors que $P(a)$ a une limite réelle P lorsque a tend vers 0 si et seulement si l'intégrale

   $$I = \int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{v^5}\ \frac{\partial W}{\partial I_1}\Big(J_1(v), J_2(v)\Big) + \frac{1}{v^3}\ \frac{\partial W}{\partial I_2}\Big(J_1(v), J_2(v)\Big)\right]\ (1 + v^3)\ dv$$

   est convergente. Vérifier la relation $P = 4I$.

3. Soit $W(I_1, I_2) = (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j$ où $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $(i, j) \neq (0, 0)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le couple (i, j) pour que le nombre P soit défini et le calculer.

Fin de l'épreuve.