BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Code épreuve :

298

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Vendredi 6 mai 2011 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt$ si $x > 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1) a) Montrer que : $\forall x \in\,]0, +\infty[$, $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{1}{e^x+1} \le \dfrac{1}{e^t+1} \le \dfrac{1}{2}$.

b) Établir alors que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\dfrac{1}{e^x+1} \le f(x) \le \dfrac{1}{2}$.

c) En déduire que la fonction f est continue (à droite) en 0.

2) a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on peut écrire : $f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on déterminera.

b) Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) a) Montrer que, pour tout réel t positif, on a : $\dfrac{t}{e^t+1} \le 1$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$.
On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynomiale P appartenant à E, associe la fonction polynomiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - (x^2-1)P'(x).$$

1) a) Montrer que f est une application linéaire.

b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.

c) Écrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

2) a) Vérifier que $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\mathrm{Im} f$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker} f$.

3) a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, déterminer les valeurs propres de A.

b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.

c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\mathrm{Ker} f$, sont inclus dans $\mathrm{Im} f$.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1) a) Pour tout i et pour tout k, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers naturels distincts, éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$, alors les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2) On pose $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3) Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4) Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011 ;
Var  x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer ;
Begin
Randomize ;
Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2') ;
Readln(n) ;
n1 : = 0 ; x1 : = 1 ;
For k : = 1 to n do
   begin
   hasard : = random(n) + 1 ;
   If  hasard = 1  then  begin x1 : = -------- ; n1 : = -------- ; end ;
   end ;
Writeln(x1, n1) ;
End.
```

Problème

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par : $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$P(\,[X \le x] \cap [Y = 1]\,) = P(X \le x)P(Y = 1) \text{ et } P(\,[X \le x] \cap [Y = -1]\,) = P(X \le x)P(Y = -1).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

2) En utilisant le système complet d'événements $\{\,(Y = 1), (Y = -1)\,\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big).$$

Partie 2 : étude de deux premiers exemples

1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

1) a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

2) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

3) a) Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

4) a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

5) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable aléatoire R.

c) Informatique.

En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en Turbo Pascal une déclaration de fonction dont l'en-tête est **function z : real ;** pour qu'elle simule la loi de Z.