EDHEC 2006, option S.

Exercice 1

Dans cet exercice, m désigne un entier naturel non nul. On note Id (respectivement θ) l'endomorphisme identité (respectivement nul) du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^m$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbf{C}^m$ vérifiant : $(f - \lambda_1 \,\mathrm{Id}) \circ (f - \lambda_2 \,\mathrm{Id}) = \theta$, où λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes distincts.

1. a. Vérifier que $\dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big((f - \lambda_1 \,\mathrm{Id}) - (f - \lambda_2 \,\mathrm{Id})\Big) = \mathrm{Id}$.

b. En déduire que : $\mathbf{C}^m = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \,\mathrm{Id})$.

c. Conclure que f est diagonalisable et donner ses valeurs propres (on sera amené à étudier trois cas).

Dans la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel et l'on se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -I$, où I désigne la matrice diagonale de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ dont les éléments diagonaux valent 1.

2. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{C})$ telle que $A^2 = -I$.

3. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = -I$.

a. Utiliser la première question pour montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{C})$ et que ses valeurs propres sont i et $-i$.

b. Pour toute matrice $M = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{C})$, on note $\overline{M}$ la matrice $(\overline{m_{i,j}})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}}$.
On note E_i et E_{-i} les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres i et$-i$.
Montrer que $X \in E_i \iff \overline{X} \in E_{-i}$.

c. En déduire que, si $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E_i, alors $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_p})$ est une famille libre de E_{-i}.
Conclure que $\dim E_i = \dim E_{-i}$.

d. Établir enfin le résultat demandé.

Exercice 2

1. a. Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\ge 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j$$

b. Vérifier que $u_2 = \frac{1}{3}$, puis calculer u_3.

2. Montrer que la série de terme général u_n est divergente et donner $\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} u_j$.

3. a. Établir que :

$$\forall n \ge 2,\ u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} u_n$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Donner un équivalent de $\ln(\frac{u_n}{u_{n+1}})$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$ puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln(\frac{u_n}{u_{n+1}})$.

d. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n)$ puis montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. a. Montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = \frac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$$

b. En utilisant la question (2), déterminer $\lim_{n\to+\infty} n\, u_n$ puis montrer que :

$$\binom{2n}{n} \underset{(n\to+\infty)}{=} o(4^n)$$

5. En utilisant le résultat de la question (3), montrer que :

$$\frac{4^n}{n} \underset{(n\to+\infty)}{=} o\left(\binom{2n}{n}\right)$$

Exercice 3

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).
On pose $Z = \sup(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1. a. Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$.

b. Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2\,\varphi(x)\,\Phi(x)$$

2. a. Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\ \mathrm{dt}$

b. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{dt}$

c. En remarquant que, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -x\,\Phi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\ \mathrm{dt}$$

d. Montrer de même que :

$$\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\ \mathrm{dt}$$

En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3. a. Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b. Déterminer $\mathrm{E}(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l' instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.
Pour tout n de $\mathbf{N}$, on note X_n, l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbf{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ et on pose $u_n = \mathrm{P}(X_n = 0)$.

Étude de la variable X_n

1. Vérifier que $X_1(\Omega) = [\![0,1]\!]$ puis donner la loi de X_1.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$.

3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \mathrm{P}(X_n = k) = \dfrac{k}{k+1}\, \mathrm{P}(X_{n-1} = k-1)$.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \mathrm{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{k+1}\, u_{n-k}$.

c. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X_n = k) = 1$, montrer que : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$.

d. Retrouver ainsi les valeurs de u_0 et u_1 puis déterminer u_2 et u_3.

4. a. En remarquant que la relation obtenue à la question (3.a) peut s'écrire sous la forme :

$$(k+1)\, \mathrm{P}(X_n = k) = k\, \mathrm{P}(X_{n-1} = k-1),$$

montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \mathrm{E}(X_n) - \mathrm{E}(X_{n-1}) = u_n$.

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{E}(X_n)$ sous forme de somme mettant en jeu certains termes de la suite (u_n).

c. Pour tout entier naturel n non nul, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j}$ et vérifier que :

$$u_n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$$

Déduire de ces deux résultats que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{(n-j)(n-j+1)}$$

d. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Déterminer ensuite $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(X_n)$.

Étude du premier retour à l'origine.

On note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. On convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 7, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$.

1. a. Pour tout k de $\mathbf{N}^*$, exprimer l'événement $\{T = k\}$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i.

b. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \; \mathrm{P}(T = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

c. Déterminer les constantes a et b telles que :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \; \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire que $\mathrm{P}(T = 0) = 0$, puis interpréter ce dernier résultat.

2. La variable T a-t-elle une espérance ?

Informatique.

1. Compléter les instructions manquantes pour que le programme Pascal suivant, dans lequel n est déclaré comme constante (ici $n = 100$), calcule et affiche $u_0, u_1, \ldots, u_n$ ainsi que l'espérance de X_n qui sera stockée dans la variable e.

```
Program edhec_2006;
const n=100;
var i,k:integer;
    s,e:real;
    u:array[0..n] of real;

Begin
  u[0]:=1; writeln(u[0]); e:=0;
  for k:=1 to n do
    begin
      s:=0;
      for i:=1 to k do
        begin
          s:=......;
          u[k]:=1-s;
        end;
      writeln(u[k]);
      e:=.......;
    end;
  writeln(e);
End.
```

2. a. Compléter le programme suivant pour qu'il calcule et affiche la valeur prise par T lors de l'expérience étudiée.
On rappelle que, si k est un entier naturel non nul, l'instruction `random(k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et $k - 1$.

```
Program edhec_2006bis;
var T,hasard:integer;

Begin
  randomize; T:=0;
  repeat T:=T+1; hasard:=random(....); until(hasard:=....);
  writeln(T);
End.
```

b. Est-on certain que le nombre de passages dans la boucle « repeat … until » est fini ?