



ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option scientifique

Vendredi 6 mai 2011

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

**Exercice 1**

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie, notée  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $Id$  l'identité de  $E$ .

Si  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$ , on rappelle qu'on désigne par  $P(u)$  l'endomorphisme suivant :  $P(u) = a_0I + a_1u + \dots + a_pu^p$  où  $u^k$  est la composée  $\underbrace{u \circ u \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$  ( $u^0 = Id$  par convention).

Dans toute la suite  $Q$  est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que  $Q(u) = 0$ . Ainsi on peut écrire  $Q(X) = (X - 1)Q_1(X)$  avec  $Q_1(1) \neq 0$ .

1. Montrer que l'image de  $(u - Id)$  est contenue dans  $\text{Ker}(Q_1(u))$
2. On note  $E_1 = \text{Ker}(u - Id)$ .
  - (a) Montrer que si  $x \in E_1$  alors  $Q_1(u)(x) = Q_1(1).x$ .
  - (b) En déduire que  $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$
  - (c) En déduire à l'aide du théorème du rang que  $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$ .
3. Montrer que  $Q_1(u) = 0$  si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de  $u$ .
4. On suppose dans cette question que  $Q(X) = (X - 1)(X + 1)^2$ , que  $E$  est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de  $u$ ; on note  $E_1$  l'espace propre associé à la valeur propre 1.

Montrer que si la dimension de  $E_1$  est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de  $E_1$  est égale à 2 ou égale à 3).

**Exercice 2**

On considère un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant  $2n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules

dans l'urne et on dit qu'une paire est reconstituée.

• si les deux boules portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant. Pour tout élément  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , et tout entier naturel  $k$  non nul, on pose  $T_i = k$  si  $k$  tirages exactement ont été nécessaires pour reconstituer  $i$  paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $T_i$  est une variable aléatoire définie sur cet espace.

1. (a) Déterminer la loi de  $T_1$  et reconnaître cette loi.  
(b) Donner, sans calcul la valeur de l'espérance de  $T_1$ .
2. Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable  $T_1$  :  

```

begin
randomize ; readln(n) ; t := 0 ;
repeat a := random(n)+1 ; b := random(n)+1 ;
t := t+1 ;
until..... ;
writeln(t) ;
end.

```
3. On pose  $X_1 = T_1$  et pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $X_i = T_i - T_{i-1}$ .  
(a) Que représente la variable  $X_i$  ?  
(b) Déterminer, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  la loi de  $X_i$  ainsi que son espérance.  
(c) En déduire que  $T_n$  admet une espérance mathématique et que l'on a  $\mathbb{E}(T_n) = n^2$ .
4. On effectue une suite de  $n$  tirages de deux boules selon le protocole précédent.  
On note  $S_n$  la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces  $n$  tirages.  
(a) Calculer  $\mathbb{P}([S_n = 0])$ .  
(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([S_n = 0])$ .  
(c) Montrer que  $\mathbb{P}([S_n = n]) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$ .
5. Expliquer ce que fait la partie principale du programme suivant :  

```

begin
randomize ; readln(n) ; m := n ; z := 0 ;
for k := 1 to n do
begin
a := random(m)+1 ; b := random(m)+1 ;
if a=b then begin z := z+1 ; m := m-1 ; end ;
end ;
writeln(z) ;
end.

```

### Exercice 3

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à  $n$ .

1. Montrer que, pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , l'intégrale :  $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$  est convergente.

On admet que l'application, notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est un produit scalaire. On note  $\| \cdot \|$  la norme associée.

2. (a) Soit  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $P'$  et  $Q'$  leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)Q(0).$$

- (b) En déduire que si  $P$  est un polynôme non constant de  $\mathbb{R}_n[X]$ , orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a  $|P(0)| = \|P\|$ .

3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  vérifiant :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, d^\circ(L_k) = k \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

- (a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  et  $(M_0, M_1, \dots, M_n)$  vérifiant les relations  $\mathcal{R}$ .

Montrer que, pour tout élément  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_k = M_k$ .

- (b) On note  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  la famille obtenue (à partir de la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ ) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

i. Justifier, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , la relation  $P_k(0) \neq 0$ .

ii. En déduire une famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  vérifiant  $\mathcal{R}$ .

- (c) Conclure et calculer explicitement  $L_1$  et  $L_2$ .

## Problème

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la variable aléatoire  $M_n$ , définie par :  $M_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a  $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .

On cherche alors des suites réelles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est à termes strictement positifs, telles que la suite  $\left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire non constante.

La fonction exponentielle sera indifféremment notée  $(x \rightarrow e^x)$  ou  $\exp$ .

### Partie 1 - La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des  $X_k$  est la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

1. Soit  $g$  la fonction définie que  $\mathbb{R}$  par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$ .

- (a) Montrer que  $g$  est une densité de probabilité. On note  $G$  une variable aléatoire admettant  $g$  comme densité.

(b) Déterminer la fonction de répartition, notée  $F_G$ , de la variable  $G$ .

2. (a) Donner, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction de répartition de la variable  $M_n$ .

(b) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$ . Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

### Partie 2 - La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des  $X_k$  est une loi normale centrée réduite. Soit  $\varphi$  la densité de  $X_1$ .

1. (a) Montrer que pour tout  $x > 0$ , l'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du$  est convergente et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

(b) En déduire que pour tout  $x > 0$ ,

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

puis que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

2. Soit  $c$  un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équation  $\frac{\phi(x)}{x} = \frac{c}{n}$  admet sur  $]0, +\infty[$  une unique solution que l'on notera  $x_n$ .

3. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

4. Montrer que pour tout entier  $n$  non nul,

$$x_n^2 + 2 \ln x_n = 2 \ln n - \ln(2c^2\pi).$$

5. En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question 4., montrer que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln n}.$$

En déduire que l'on peut écrire pour  $n \geq 2$ ,

$$x_n = \sqrt{2 \ln n} + \varepsilon_1(n) \text{ où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2 \ln n}} = 0.$$

6. (a) En utilisant la question 4., montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$2(\sqrt{2 \ln n})\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2 \ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2 \ln n}}\right) = -\ln(\ln n) - \ln(4\pi c^2).$$

(b) En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation du a), montrer que

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2 \ln n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(\ln n).$$

En déduire que

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2 \ln n}} + \varepsilon_2(n) \text{ où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_2(n) \left(\frac{2\sqrt{2 \ln n}}{\ln(\ln n)}\right) = 0.$$

On admet alors qu'en poursuivant le développement asymptotique, que l'on peut écrire pour tout entier  $n$  supérieur à 2 :

$$x_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2 \ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2 \ln n}} - \frac{\ln c}{\sqrt{2 \ln n}} + \varepsilon(n)$$

$$\text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n)\sqrt{2 \ln(n)} = 0.$$

7. On pose pour  $n \geq 2$ ,  $a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \ln n}}$  et  $b_n = \sqrt{2 \ln n} - \frac{\ln(\ln n)}{2\sqrt{2 \ln n}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2 \ln n}}$ .

Montrer à l'aide des questions précédentes, que pour tout  $x$  réel, et pour tout entier  $n \geq 2$ , en posant  $c = e^{-x}$  que :

(a)

$$a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n)$$

(b)

$$\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n}.$$

(c) En déduire, en utilisant la question 1.b. que  $\frac{\phi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n)$  puis que la suite

$\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable  $G$  ( la variable  $G$  est définie dans la partie 1.)