

MATHÉMATIQUES A
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage de la calculatrice, d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont indépendants.

Dans le premier problème le graphe demandé à la question IV.1.4 sera tracé avec soin sur une feuille de papier millimétré. Les différentes parties de ce premier problème traitent de façons indépendantes du même objet **T**, défini dans le préambule.

Premier problème.

Dans ce problème **E** désigne l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On appelle polynôme toute fonction polynomiale de \mathbb{R} dans lui-même ; on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et, pour tout entier naturel d , on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d . On rappelle que, par convention, le degré du polynôme nul est fixé à $-\infty$.

Pour tout élément f de **E** on note $T(f)$ l'application de \mathbb{R} dans lui-même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

Première partie : exemples.

Soit ω un réel ; on note f_ω l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_\omega(x) = e^{\omega x}$ et on note g l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.1. Déterminer pour tout ω réel les fonctions $T(f_\omega)$ et $T(g)$.

I.2. Soit $\mathbf{C} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan, \mathcal{G} la courbe représentative de g dans le repère \mathbf{C} et Δ la droite d'équation $x = 1$ dans le repère \mathbf{C} .

I.2.1. Montrer que Δ est un axe de symétrie de \mathcal{G} .

I.2.2. Tracer sommairement \mathcal{G}' la courbe représentative de $T(g)$ dans le repère \mathbf{C} .

I.2.3. Déterminer un axe de symétrie de \mathcal{G}' .

I.2.4. La fonction $T(g)$ est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R} ?

T.S.V.P.

Deuxième partie : étude de T .

II.1. Montrer que, pour tout élément f de \mathbf{E} , l'application $T(f)$ appartient à \mathbf{E} et est dérivable sur \mathbb{R} . Déterminer la fonction dérivée de $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

II.2. On note T l'application de \mathbf{E} dans lui-même définie par $f \mapsto T(f)$.

II.2.1. Rappeler pourquoi T est un endomorphisme de \mathbf{E} .

II.2.2. T est-elle une application surjective ?

II.3. On suppose que f est une application de \mathbf{E} , bornée sur \mathbb{R} .

II.3.1. Montrer que $T(f)$ est également une application bornée sur \mathbb{R} .

II.3.2. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}, \quad |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x - y|.$$

II.4. Montrer que si f est une fonction périodique de \mathbf{E} alors $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur \mathbb{R} .

II.5. Déterminer la parité de $T(f)$ en fonction de la parité de f .

Troisième partie : étude de restrictions.

III.1. Soit ω un réel non nul ; on note $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 les fonctions de \mathbf{E} définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \cos(\omega x), \quad \varphi_2(x) = \sin(\omega x), \quad \varphi_3(x) = x \cos(\omega x), \quad \varphi_4(x) = x \sin(\omega x).$$

On note F_ω le sous-espace vectoriel de \mathbf{E} engendré par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 .

III.1.1. On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Montrer que \mathcal{B} est une base de F_ω .

III.1.2. Calculer $T(\varphi_1), \dots, T(\varphi_4)$ et en déduire que $T(F_\omega) \subset F_\omega$.

Dans la suite on note M_ω la matrice dans la base \mathcal{B} de la restriction T_ω de T à F_ω , définie par :

$$\begin{aligned} T_\omega : F_\omega &\rightarrow F_\omega \\ f &\mapsto T(f) \end{aligned}$$

III.1.3. Déterminer le rang de M_ω selon la valeur de ω .

III.1.4. Déterminer le noyau de T_ω selon la valeur de ω .

III.1.5. L'endomorphisme T_ω est-il injectif ?

III.2. Soit (d, n) un couple d'entiers naturels non nuls ; on note ε_n le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon_n(x) = x^n$ et ε_0 la fonction constante égale à 1. On rappelle que $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

III.2.1. Montrer que $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$.

Dans la suite on note A_d la matrice dans la base \mathcal{C} de la restriction, Θ_d , de T à $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :

$$\begin{aligned} \Theta_d : \mathbb{R}_d[X] &\rightarrow \mathbb{R}_d[X] \\ f &\mapsto T(f) \end{aligned}$$

- III.2.2. Déterminer A_3 . Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?
- III.2.3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de Θ_d .
- III.2.4. Dans le cas où $d \geq 2$, l'endomorphisme Θ_d est-il diagonalisable ?
- III.2.5. L'endomorphisme Θ_d est-il bijectif ?

III.3. Soit Θ la restriction de T à $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\Theta : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$f \mapsto T(f)$$

- III.3.1. Montrer que Θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- III.3.2. L'endomorphisme Θ est-il bijectif ?
- III.3.3. On note h le polynôme $2\varepsilon_3 + 6\varepsilon_2 + 8\varepsilon_1 + 4\varepsilon_0$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $\Theta(f) = h$.

Quatrième partie : étude d'une transformée.

On note g l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}.$$

On rappelle que pour tout x réel on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel dont le cube vaut x .

IV.1. Etude de la fonction g .

- IV.1.1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g .
- IV.1.2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et donner son tableau de variation.
- IV.1.3. Montrer que \mathcal{G}_1 , courbe représentative de g , admet une asymptote oblique dont on étudiera la position par rapport à la courbe \mathcal{G}_1 aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
- IV.1.4. Tracer avec soin la courbe représentative de g ainsi que son asymptote oblique.

IV.2. Etude de la fonction $T(g)$.

- IV.2.1. Etudier la parité de $T(g)$.
- IV.2.2. Déterminer les variations de $T(g)$.
- IV.2.3. Calculer la valeur $T(g)(0)$.

Deuxième problème : matrices de Toeplitz.

Dans ce problème, on note de nouveau, pour tout entier naturel d , $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à d et ε_d l'application définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto t^d$. On note $S : \mathbb{R}_d[X] \rightarrow \mathbb{R}_d[X]$ l'application définie par

$$\forall (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}, S\left(\sum_{i=0}^{i=d} a_i \varepsilon_i\right) = \sum_{i=0}^{i=d-1} a_{i+1} \varepsilon_i.$$

T.S.V.P.

Dans la suite du problème d désigne un entier naturel, I_d l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_d[X]$, et $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}_d[X]$. Enfin, on note \mathcal{U} le sous-espace de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ engendré par

$$(I_d, S, S^2, \dots, S^d).$$

Première partie.

I.1. Montrer que S est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_d[X]$ et donner les images par S des vecteurs de la base $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$.

I.2. Ecrire la matrice de S dans la base $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$.

I.3. Ecrire la matrice de S^k dans la base $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$ pour k entier naturel compris entre 1 et d puis vérifier que $S^{d+1} = 0$.

I.4. Montrer que $(I_d, S, S^2, \dots, S^d)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$.

I.5. Vérifier qu'un élément $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ appartient à \mathcal{U} si et seulement si sa matrice $B = (b_{i,j})$, dans la base $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_d)$, est triangulaire supérieure et vérifie $b_{i,j} = b_{0,j-i}$ pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leq i \leq j \leq d$.

I.6. Dans cette question on suppose que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$ commute avec S ; montrer que

$$\forall k \in \{0, \dots, d\}, u(\varepsilon_k) = S^{d-k}(u(\varepsilon_d)).$$

En déduire que \mathcal{U} est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}_d[X]$ qui commutent avec S .

Deuxième partie.

Dans cette partie $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ est un d -uplet de réels. On suppose que λ_1 est non nul et on note $u = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k S^k$.

II.1. Déterminer u^{d+1} et montrer que $(I_d, u, u^2, \dots, u^d)$ est une base de \mathcal{U} .

II.2. On note $e_d = \varepsilon_d$ et pour tout k entier naturel, $k \in \{0, \dots, d-1\}$, on note $e_k = u^{d-k}(e_d)$. Montrer que (e_0, \dots, e_d) constitue une base de $\mathbb{R}_d[X]$. Ecrire la matrice de u dans cette base.

FIN.