Banque << Agro – Véto >>
A – 0208

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Les problèmes I et II sont indépendants.

Problème I : Réduction d'une matrice.

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 7/12 & -1/6 & 1/12 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/12 & -1/6 & 7/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. ***Méthode matricielle.***
   - ***(a)*** Déterminer les valeurs propres de A.
     Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de A ?
   - ***(b)*** Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé. Les vecteurs seront choisis de troisième composante égale à 1.
   - ***(c)*** En déduire une matrice R réelle et inversible telle que : $R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.
   - ***(d)*** Calculer R^{-1} (le détail des calculs figurera sur la copie).
2. ***Méthode vectorielle.***
   Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
   - ***(a)*** Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X],+,.)$.
     Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa dimension.

(b) P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, nous lui associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, \ P^*(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x P(t)\,dt \\ P^*(0) = P(0) \end{cases}.$$

Démontrer que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Nous définissons alors une application φ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans lui-même en posant :

$$\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \mapsto P^*.$$

(c) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

(d) Calculer la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ (les polynômes de $\mathcal{B}$ seront rangés par ordre de degré croissant).

(e) Notons $f_0 : x \mapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \mapsto (x-1)(x+1)$, $f_2 : x \mapsto (x+1)^2$.

Montrer que $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathcal{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1), P(-1)$ et $P'(1)$, dérivée de P en 1.

(f) Calculer $\varphi(f_0), \varphi(f_1), \varphi(f_2)$ et donner l'expression de ces fonctions polynômes dans la base $\mathcal{B}$.

Donner ensuite l'expression de $\varphi(f_0), \varphi(f_1), \varphi(f_2)$ dans la base $\mathcal{F}$ puis écrire la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{F}$.

(g) Écrire la relation matricielle entre M et M' et retrouver les résultats de la question ***1.(c)***.

3. Application à l'étude de trois suites numériques.

Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12} \\ v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 2v_n - w_n}{3} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12} \end{cases}.$$

(a) Écrire un algorithme qui calcule, pour un entier naturel n donné, les valeurs de u_n, v_n et w_n.

Écrire ensuite un algorithme qui, pour un entier naturel n donné, calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

(c) Déterminer pour tout entier naturel *n*, une expression de A^n (on pensera à utiliser la réduction de la matrice *A*).

En déduire pour tout entier naturel *n*, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de *n* et des réels u_0, v_0 et w_0.

(d) Les suites *u*, *v* et *w* sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite respective.

Problème II : Étude d'une application fonctionnelle.

1. ***Étude d'une fonction définie par une intégrale.***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

(a) Pour tout réel non nul *x*, justifier l'existence de l'expression $\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Nous définissons alors la fonction *g* par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ g(0) = f(0) \end{cases}$.

(b) Justifier l'existence d'une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

F étant l'une des primitives de *f* sur $\mathbb{R}$ exprimer, pour tout réel *x* non nul, $g(x)$ à l'aide de la fonction *F*.

(c) Montrer que *g* est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que *g* est paire.

Que peut-on dire de plus sur *g* si *f* est impaire ? Le démontrer.

Nous définissons l'application *a* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big).$$

(e) Montrer que : $g(0) = a(0)$, et que pour tout réel non nul *x* : $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$.

(f) Montrer maintenant que *g* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\,g'(x) + g(x) = a(x).$$

(g) Dans cette question seulement, *f* est supposée dérivable en 0.

Montrer qu'alors *a* est dérivable en 0,

Puis, à l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de *a*, montrer que *g* est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

(h) Dans cette question seulement, $f : x \mapsto |x|$.

Pour tout réel *x* strictement positif puis pour tout réel *x* strictement négatif, calculer l'expression $g(x)$.

Montrer alors que *g* n'est pas dérivable en 0.

2. ***Dans le cas où f « diminue les distances ».***

Dans cette question **2.** , *f* est une application définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x \neq y \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < |x - y| .$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons alors associer à f la fonction g définie à la question ***1.*** .

(b) a désignant toujours l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ a(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big),$$

montrer que pour tout réel x : $g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u$.

(c) Montrer que pour tous réels distincts v et w : $\left|a(v) - a(w)\right| < \left|v - w\right|$,

puis en déduire que pour tous réels distincts x et y : $\left|g(x) - g(y)\right| < \left|x - y\right|$.

3. Étude d'un endomorphisme de fonctions.

$\left(C^0(\mathbb{R}), +, .\right)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles muni des lois usuelles.

Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction Φ qui à toute fonction f appartenant à $C^0(\mathbb{R})$, associe la fonction g définie à la question ***1.*** .

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer le noyau de Φ (on pourra utiliser la question ***1.(f)***).

(c) Nous savons que l'application *sin* est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire. Admet-elle un antécédent par Φ dans $C^0(\mathbb{R})$?

Que peut-on en déduire sur la fonction Φ ?

(d) Montrer que l'application $u : x \mapsto |x-1| + |x+1|$, continue sur $\mathbb{R}$ et paire, n'admet pas d'antécédent par Φ dans $C^0(\mathbb{R})$.

FIN