$\ast$ Banque filière PT $\ast$

Epreuve de Mathématiques I-B

Durée 4 h

Le but de ce problème est l'étude de séries entières à termes positifs sur le bord de l'intervalle de convergence. Toutes les séries entières considérées ici s'annulent en 0 (et sont donc indexées par $\mathbb{N}^*$). Une série de terme général a_n sera notée $\sum a_n$ tandis que sa somme (lorsque la série converge) sera notée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Le problème est constitué de 4 parties. La première partie est un exemple introductif illustrant les résultats généraux des parties suivantes; elle est indépendante du reste du problème. Les parties II, III et IV ne sont pas indépendantes entre elles et on pourra admettre un résultat non démontré d'une question précédente pour répondre à une autre question.

Partie I

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites de réels définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = 1 \quad v_n = \frac{1}{n} \quad w_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$$

1) Montrer que les trois séries entières $\sum u_n x^n$, $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1.
Étudier la convergence des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$.
2) Déterminer la somme $f(x)$ (respectivement $g(x)$, $h(x)$) de la série $\sum u_n x^n$ (respectivement $\sum v_n x^n$, $\sum w_n x^n$).

3) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)$.

Comparer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n}$.

Comparer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{v_n}$.

Partie II

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions

$$(H)\begin{cases} (H_1)\ a_n > 0 \text{ pour tout} n \in \mathbb{N}^* \\ (H_2) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1 \\ (H_3) \text{ la série } \sum a_n \text{ est divergente} \end{cases}$$

On désigne par f la somme de la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

a) Soit $A > 0$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n \geq 2A$.

b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leq 1 - x \leq \alpha$ entraîne $\sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geq A$.

c) En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = +\infty$.

2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

a) On suppose $\lambda \neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$? Que peut-on dire de ce rayon de convergence lorsque $\lambda = 0$?

b) Soit g la somme de la série entière $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[$. On pose $\lambda_n = \dfrac{b_n}{a_n}$. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda = \frac{1}{f(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda) a_n x^n.$$

Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $|\lambda_n - \lambda| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geq N_2$, $|\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon$. En déduire que pour $x \in]0, 1[$, $\sum\limits_{n=N_2+1}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leq \varepsilon f(x)$

d) Montrer que, pour $x \in]0, 1[$,

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} - \lambda \right| \leq \varepsilon + \frac{M}{f(x)} \sum_{n=1}^{N_2} a_n x^n.$$

En déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lambda$.

Partie III

On donne les résultats suivants qu'on ne demande pas de justifier : si $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \, d\theta$, alors $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et pour $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} \frac{\pi}{2}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, on a $I_n \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

Soit l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x\cos^2\theta}}$.

1) Montrer que $F(x)$ est définie pour $x < 1$.
   Que se passe-t-il pour $x = 1$?
   Étudier sans calcul le sens de variation de F.
   Montrer que F est continue sur $]-\infty, 1[$.
2) On définit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n \text{ pour } t \in]-1, 1[.$$

   Expliciter α_0, α_1 et, pour $n \geq 2$, α_n.
   Comparer α_n et I_n.
3) a) x étant fixé dans $]-1, 1[$, on pose, pour $N \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x\cos^2\theta}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos^{2n}\theta \, x^n + \rho_N(\theta).$$

   Montrer que $|\rho_N(\theta)| \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.

   b) En déduire que $F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n \, I_n \, x^n + R_N$
   avec $|R_N| \leq \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.
   En déduire le développement en série entière de $F(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
4) En utilisant les résultats de la partie II, déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Partie IV

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels vérifiant les conditions :

$$(H') \begin{cases} (H'_1) \text{ } a_1 > 0 \text{ et } a_n \geq 0 \text{ pour tout} n \in \mathbb{N}^* \\ (H'_2) \text{ la série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1 \\ (H'_3) \text{ la série } \sum a_n \text{ est divergente} \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (H_1) et (H_3) de la partie II.
Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n x^n$ est au plus égal à 1.

b) Soit $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. En remarquant que $r^k \geq r^n$ pour $1 \leq k \leq n$, montrer que la suite $(A_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.
En déduire que (A_n) vérifie toutes les conditions (H) de la partie II.

c) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(1-x)\sum_{k=1}^{n} A_k x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1}.$$

En déduire une relation entre $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n x^n$.

2) Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Posons $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C_n}{A_n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum C_n x^n$ est convergente.

b) En déduire que la série $\sum c_n x^n$ est convergente pour $x \in]-1, 1[$ et établir une relation entre $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n x^n$.

c) Montrer alors que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n} = \lambda$.

3) On définit les deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \\ c_n &= \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est de la forme } 2^k,\ k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

a) Si $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, montrer que $A_n \sim \ln n$.

b) Montrer que si $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$, $\quad \dfrac{\ln n}{\ln 2} \leq C_n \leq \dfrac{\ln n}{\ln 2} + 1$

c) Déduire de ce qui précède un équivalent quand x tend vers 1 de la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^{2^k}$.