

Epreuve de Mathématiques I-A

Durée 4 h

PROBLEME

L'usage de tout matériel électronique est interdit. Les trois parties du problème sont indépendantes.

PARTIE A

1. Pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on note $a_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ la moyenne arithmétique de ses n premiers termes.

(a) On se propose de montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l , alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l . Soit $\epsilon > 0$.

- i. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne : $|u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$.
- ii. Montrer que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|a_n - l| \leq \frac{|u_1 - l| + |u_2 - l| + \dots + |u_{n_0} - l|}{n} + \frac{|u_{n_0+1} - l| + \dots + |u_n - l|}{n}.$$

iii. Montrer qu'il existe un entier $n_1 > n_0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne :

$$\frac{|u_1 - l| + |u_2 - l| + \dots + |u_{n_0} - l|}{n} < \frac{\epsilon}{2}.$$

iv. Conclure.

(b) On suppose ici que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l . On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

i. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement convergente.
On pourra considérer la suite de terme général $(-1)^n$.

ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas nécessairement bornée.

On pourra considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \begin{cases} p & \text{si } n = p^3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

iii. On suppose en outre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante.

Montrer alors par l'absurde que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par l . Conclure.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par la récurrence :

$$u_1 \in]0, \pi[\quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

(a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < u_n < \pi$, puis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

(b) Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$u_n - \sin u_n \sim \frac{u_n^3}{6} \quad \text{puis} \quad u_n^2 - u_{n+1}^2 \sim \frac{u_n^2 u_{n+1}^2}{3}.$$

(c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{3}$.

Démontrer alors que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_{n+1}^2 = 3$.

En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

3. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum \alpha_k$ diverge.

A toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on associe la suite de terme général : $a_n = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$.

(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k = +\infty$.

(b) En s'inspirant de la question 1.a., montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l , alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l .

4. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le réel l .

(a) Déterminer la limite de la suite de terme général : $v_n = \frac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n)$.

(b) Même question avec la suite de terme général :

$$w_n = \frac{1}{2^n} (C_n^0 u_0 + C_n^1 u_1 + \dots + C_n^n u_n)$$

où C_n^k désigne le coefficient binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On pourra montrer que $C_n^k \leq \frac{n^k}{k!}$.

PARTIE B

Soit $\sum a_n$ une série réelle convergente. On note S sa somme.

1. Montrer qu'alors la série entière de coefficients a_n a un rayon de convergence R au moins égal à 1.

Dans toute la suite de cette partie on pose : $\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On se propose d'étudier la continuité de la fonction f en 1.

2. Montrer que si $R > 1$ alors f est continue en 1.

3. On se place dans le cas où $R = 1$. On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ la somme partielle de rang n .

(a) Soit $x \in]-1, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$.

i. Montrer que : $(1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n - S_N x^{N+1}$.

ii. En déduire que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left[(1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n \right] = f(x)$.

(b) Montrer alors que le rayon de convergence de la série entière, de coefficients S_n , est au moins égal à 1, et que :

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

(c) Nous nous proposons de montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} - S \right) = 0$. Soit $\epsilon > 0$.

i. Vérifier que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} - S = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n.$$

On supposera donc pour la suite que $S = 0$.

ii. Montrer qu'il existe un entier positif N tel que : $n > N$ entraîne $|S_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

iii. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $\left| \frac{\sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

iv. Montrer enfin qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall x \in [1-\eta, 1[$ $\left| \frac{\sum_{n=0}^N S_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Conclure.

(d) En déduire que la fonction f est continue en 1.

4. Etablir la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ puis déterminer sa somme.

PARTIE C

Soit (d_n) une suite réelle convergente.

1. Montrer que la série entière de coefficients $\frac{d_n}{n!}$ a un rayon de convergence R infini.

Dans la suite de cette partie, à toute suite réelle (d_n) convergente, on associe la fonction f_d définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

2. Montrer que la fonction f_d est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .
3. Nous nous proposons de montrer que si la suite (d_n) converge vers le réel l , alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} f_d(t) = l$.

(a) Justifier l'existence d'une suite réelle (r_n) convergeant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait : $d_n = l + r_n$.

(b) Montrer que pour tout réel t on a : $f_d(t) = le^t + f_r(t)$.

(c) Soit $\epsilon > 0$, prouver l'existence d'un entier n_0 tel que : $n > n_0$ entraîne $|r_n| < \frac{\epsilon}{2}$.

Montrer alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$|f_r(t)| \leq \sum_{n=0}^{n_0} \frac{|r_n|}{n!} t^n + \frac{\epsilon}{2} e^t.$$

(d) En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_r(t)e^{-t} = 0$. Conclure.

4. On pose, $D_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $D_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k$.

Montrer que pour tout réel positif x , on a :

$$\int_0^x f_d(t)e^{-t} dt = f_D(x)e^{-x}.$$

5. En déduire que si $\sum u_n$ est une série numérique convergente alors : $\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,

où f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n$.