CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

1. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

2.1 Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_4.

2.2 Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.3 Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^u$.

2.4 Prouver l'existence de $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

2.5 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ que l'on exprimera sous la forme d'une intégrale.

3. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\ \mathrm{d}t$.

3.1 Calculer $J_0,\ J_1,\ J_2$.

3.2 Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.

3.3 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{(2k+1)} = \frac{2.4.6.8.\cdots(2n)}{1.3.5.7.\cdots(2n+1)}$

3.4 En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.

3.5 Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4. À l'aide d'un changement de variable donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

1. Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel, on note u l'endomorphisme dont la matrice canoniquement associée est $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner la nature géométrique de u et ses éléments caractéristiques.

2. Soient $d \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^3 + X^2 + d$. Déterminer les valeurs de d telles que le polynôme P soit scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $Q(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$ dont on note α, β et γ les racines dans $\mathbb{C}$.

3.1 Exprimer les coefficients a, b et c à l'aide des racines α, β et γ.

3.2 Déterminer tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation de $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel.

EXERCICE 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.

On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si à la fois : $\begin{cases} \bullet\ a_1 \geqslant 1, \\ \bullet \text{ la suite } (a_n) \text{ est bornée,} \\ \bullet\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0, \\ \bullet \text{ la série } \displaystyle\sum_{n>0} a_n \text{ diverge.} \end{cases}$

On note alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2\ ,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$$

Dans tout l'exercice, on utilisera sans le démontrer la propriété suivante, notée (R) :

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
>
> **Si :** $\begin{cases} (a) \quad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ \quad\quad \textbf{et} \\ (b) \text{ la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ diverge} \end{cases}$ **alors :** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

En utilisant les séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que :

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

2. **2.1** De façon analogue, montrer que :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

2.2 En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.

2.3 Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R).

3. Etude de deux exemples.

3.1 On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$.

- Vérifier que la suite (a_n) ainsi définie satisfait à la propriété (P).
- Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

3.2 On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{n}$.

- Vérifier que la suite (a_n) ainsi définie satisfait à la propriété (P).
- En utilisant la propriété (R) et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} w_n$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$.

4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).

4.1 Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$

4.2 Prouver que :

$$\frac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$

4.3 Déterminer alors la nature de la série : $\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_n}{A_n}$.

4.4 A l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

5. Soit (u_n) le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente.

Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que : $\begin{cases} \bullet\ v_n \underset{+\infty}{=} o(u_n) \\ \bullet \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ diverge} \end{cases}$

6. Soit (a_n) une suite vérifiant la propriété (P).

Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

EXERCICE 4

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(G, \times)$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall X \in G \quad , \quad X^p = I_n$$

où I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $E = \text{Vect}(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la partie G.

Une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = O_n$ (matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$).

1. Quel est le spectre d'une matrice nilpotente ?

2. Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

3. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

3.1 Déterminer deux nombres complexes α et β tels que : $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

3.2 Prouver l'équivalence :

$$A \text{ nilpotente} \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 0$$

On admettra dans toute la suite de l'exercice que cette propriété se généralise pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff \text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = \ldots = \text{tr}(A^n) = 0}$$

4. **4.1** Vérifier que E est un espace vectoriel de dimension finie.

4.2 Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et une famille $(M_1, M_2, \ldots, M_r)$ <u>d'éléments de G</u> tels que $(M_1, \ldots, M_r)$ soit une base de E.

On ne cherchera pas à calculer r ni à déterminer les matrices M_j.

5. On note $\mathbb{U}_p$ l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité.

5.1 Préciser le cardinal de $\mathbb{U}_p$ et expliciter ses éléments.

5.2 Soit X une matrice élément de G et λ une valeur propre de X. Montrer que $\lambda \in \mathbb{U}_p$.

6. Prouver que tout élément de G est diagonalisable.

7. Prouver que l'ensemble $\mathscr{S} = \{\text{tr}(X),\ X \in G\}$ est fini. Donner un majorant du cardinal de $\mathscr{S}$.

On considère alors l'application :

$$\varphi : X \in G \longmapsto \varphi(X) = (\ \text{tr}(XM_1), \ldots, \text{tr}(XM_r)\ ) \in \mathbb{C}^r$$

8. Soient A et B deux éléments de G tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$.

On note $N = A\,B^{-1} - I_n$.

8.1 Justifier que $A B^{-1} \in G$.

En déduire que N est diagonalisable.

8.2 Montrer que :

$$\forall i \in \{1, ..., r\},\ \mathrm{tr}(A M_i) = \mathrm{tr}(B M_i)$$

En déduire que :

$$\forall X \in E,\ \mathrm{tr}(A X) = \mathrm{tr}(B X)$$

8.3 Soit $k \in \mathbb{N}$.

En écrivant que $(A B^{-1})^k = A B^{-1} A B^{-1} \dots A B^{-1}$ (k facteurs) et en utilisant la question précédente, montrer que :

$$\mathrm{tr}\left[(A B^{-1})^k\right] = n$$

8.4 Calculer alors $\mathrm{tr}(N)$, $\mathrm{tr}(N^2)$, ..., $\mathrm{tr}(N^n)$.

Que peut-on alors dire de la matrice N ?

8.5 Montrer que φ est injective.

9. Montrer que $\varphi(G) \subset \mathscr{S}^r$.

10. Que peut-on en déduire pour G ?

Fin de l'épreuve