Rappels, notations et objectifs du problème

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n. De plus :
• $\mathcal{M}_n$ désigne l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n ;
• si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $A_{i,j}$ le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j ;
• pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha, \beta)$ est la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$;
• si $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \cdots, \beta_p)$ sont dans $\mathbb{R}^p$, on désigne par $\text{diag}\,(M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \cdots, M(\alpha_p, \beta_p))$ la matrice de $\mathcal{M}_{2p}$ définie par blocs carrés d'ordre 2 dont les seuls blocs éventuellement non nuls sont les blocs diagonaux $M(\alpha_1, \beta_1), M(\alpha_2, \beta_2), \cdots, M(\alpha_p, \beta_p)$;
• I_n est la matrice unité élément de $\mathcal{M}_n$;
• On rappelle les trois types d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice et leur codage :

opérations	codage
échange des lignes i et j	$L_i \leftrightarrow L_j$
multiplication de la ligne i par $\alpha \neq 0$	$L_i \leftarrow \alpha L_i$
ajout de la ligne j, multipliée par le scalaire λ, à la ligne i $(i \neq j)$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

On définit de même trois types d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.
Si $A \in \mathcal{M}_n$ et si E est la matrice obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, alors EA (resp.AE) est la matrice obtenue à partir de A en effectuant la même opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) de A (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

On confond respectivement :
• matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) canoniquement associé,
• vecteur de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) et matrice colonne de ses coordonnées,
• matrice de taille 1 et scalaire la constituant.

On rappelle qu'une symétrie s de $\mathbb{R}^n$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $s^2 = s \circ s = Id_{\mathbb{R}^n}$; il existe alors deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2 tels que s soit la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, définie par :

$$s|_{E_1} = Id_{E_1} \text{ et } s|_{E_2} = -Id_{E_2}.$$

Préciser la symétrie , c'est déterminer les sous-espaces E_1 et E_2 associés.

On note (P_A) la propriété :

(P_A)	A ne possède pas de valeur propre réelle

Le but de ce problème est d'étudier des matrices de $\mathcal{M}_n$ vérifiant la propriété (P_A). Après avoir établi quelques résultats préliminaires, on étudie des cas particuliers dans les parties I et II et un cas plus général dans la partie III.

Résultats préliminaires

1. On se propose de démontrer le résultat suivant :
« deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n$ ».
Soit donc A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$(et un élément P de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

a. Montrer qu'il existe (R, J) éléments de $\mathcal{M}_n$ tels que $P = R + \imath J$ avec $\imath^2 = -1$.

b. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $A(R + tJ) = (R + tJ)B$

c. Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\det(R + t_0 J) \neq 0$.

d. En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n$.

2. **a.** Montrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède au moins une racine réelle.

b. En déduire que s'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n$ vérifiant (P_A) , alors n est pair

Dans toute la suite du problème, on suppose n pair et on note $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

I Première partie

I.A

Dans cette section I.A., on se place dans $\mathbb{R}^2$ et on désigne par (e_1, e_2) la base canonique, avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

I.A.1 . On considère la matrice $M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on désigne par u l'endomorphisme associé.

a. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de s_1, symétrie par rapport à la droite $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}e_2$.

b. Déterminer, dans la base canonique, la matrice de l'application $u \circ s_1$. En déduire qu'il existe une symétrie s_2, qu'on précisera, telle que $u = s_2 \circ s_1$.

I.A.2 . On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a. Montrer que A est semblable à $M(0,1)$ et donner une matrice P de $\mathcal{M}_2$, à coefficients entiers et de déterminant 1 telle que $M(0,1) = P^{-1}AP$.

b. Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on précisera.

Soit α et β des nombres réels tels que $\beta^2 - \alpha^2 = 1$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$

c. Montrer que B est semblable à $M(0,1)$ et donner une matrice Q de $\mathcal{M}_2$ telle que $M(0,1) = Q^{-1}BQ$.
Indication : on pourra calculer Be_1.

d. Montrer que B est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.3 . On considère la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont des nombres réels tels que $\beta^2 + \alpha^2 = 1$.

Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries qu'on ne demande pas de préciser.

I.A.4 . On considère à présent la matrice $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\beta^2 + \alpha^2 \neq 0$. Montrer que $M(\alpha,\beta)$ est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.5 . Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients de A pour que (P_A) soit réalisée.

b. En supposant que A vérifie (P_A), et en étudiant la diagonalisation dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de A , montrer qu'il existe une unique matrice, semblable à A , du type $M(\alpha,\beta)$ avec α réel et β réel strictement positif. Expliciter α réel et β en fonction de a, b, c, et d .

c. Que peut-on dire de $\det(A)$ si A vérifie (P_A) et est dans $\mathcal{M}_2$?

d. Montrer que A est la matrice, dans la base canonique, de la composée de deux symétries et d'une homothétie.

I.A.6 . On suppose que $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique (i.e.(e_1, e_2) est orthonormée directe). Que sont alors les endomorphismes de matrice $M(\alpha,\beta)$ (avec α et β réels tels que $\beta^2 + \alpha^2 \neq 0$) dans la base canonique ?

I.B

Soit B une matrice de $\mathcal{M}_p$ vérifiant $B^2 = I_p$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n$ définie par blocs sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} 2B & -5B \\ B & -2B \end{pmatrix}$$

I.B.1 . Montrer que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p$ et qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{M}_p$ inversible, des entiers naturels q et r tels que $Q^{-1}BQ$ soit sous la forme d'une matrice par blocs $\begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$

On convient que cette matrice vaut I_p lorsque $r = 0$ et $q = p$ et qu'elle vaut $-I_p$ lorsque $q = 0$ et $r = p$.

I.B.2 . Déterminer une matrice par blocs P de $\mathcal{M}_n$ inversible et constituée de multiples de I_p telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

I.B.3 . En déduire que A est semblable dans $\mathcal{M}_n$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}$

I.B.4 . Montrer alors que A est semblable dans $\mathcal{M}_n$ à une matrice du type $\mathrm{diag}\,(M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1))$.

I.B.5 . Exemple : on considère dans $\mathcal{M}_4$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -10 & -15 \\ -2 & -4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une matrice inversible M de $\mathcal{M}_4$ telle que $M^{-1}AM = \mathrm{diag}\,(M(0,1), M(0,1))$.

b. En utilisant la technique vue à la question **I.A.1**, montrer que A est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la composée de deux symétries qu'on précisera.

II Deuxième partie

II.A

Dans cette question, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n$ telle que $A^2 = -I_n$.

II.A.1 . Montrer que (P_A) est réalisée.

II.A.2 . Si E est obtenue à partir de I_n par utilisation d'une opération élémentaire, comment déduit-on EAE^{-1} de A ? On distinguera les trois opérations élémentaires codées sous la forme

a) $L_i \leftrightarrow Lj$,

b) $L_i \leftarrow \alpha Li$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$,

c) $L_i \leftarrow Li + \lambda Lj$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.A.3 . **a.** En utilisant **II.A.1**, montrer qu'il existe $i \geq 2$ tel que $A_{i,1} \neq 0$.

b. En utilisant des opérations élémentaires, en déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que si $A' = PAP^{-1}$ alors $A'_{i,1} = 0$ si $i \neq 2$ et $A'_{2,1} = 1$.

c. Montrer alors que $A'_{i,2} = 0$ si $i \neq 1$ et $A'_{1,2} = -1$.

II.A.4 . Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_n$ inversible telle que $QA'Q^{-1}$ soit de la forme par blocs $\begin{pmatrix} M(0,1) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-2}$.

II.A.5 . Montrer que A est semblable à une matrice du type $\mathrm{diag}(M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1))$.

II.A.6 . *Exemple :* en utilisant la méthode décrite dans cette partie, trouver une matrice M inversible de telle que $MAM^{-1} = \mathrm{diag}(M(0,1), M(01))$ où A est la matrice de la question **I.B.5** . On fera apparaître clairement les opérations élémentaires utilisées.

II.B

Dans cette question A est une matrice de $\mathcal{M}_n$ vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 + \beta^2 I_n = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

II.B.1 . Montrer que A vérifie (P_A).

II.B.2 . Montrer que A est semblable à la matrice d'ordre n $\mathrm{diag}(M(\alpha,\beta), M(\alpha,\beta), \cdots, M(\alpha,\beta))$. Que peut-on dire de $\det(A)$?

II.C

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $u(P)$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad , u(P)(x) = x^{n-1} P\left(\frac{-1}{x}\right)$$

II.C.1 . Déterminer pour quelles valeurs de i et j dans $\{0, \cdots, n-1\}$, le plan $\mathrm{Vect}(X^i, X^j)$ est stable par u.

II.C.2 . En déduire que la matrice A de $\mathcal{M}_n$ telle que $A_{n+1-i,i} = (-1)^{i-1}$ si $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients de A étant nuls, est semblable à $\mathrm{diag}(M(0,1), M(0,1), \cdots, M(0,1))$.

III Troisième Partie

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n$ vérifiant (P_A). On se propose de montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

i) A est semblable à une matrice du type $\text{diag}(M(\alpha_1,\beta_1), M(\alpha_2,\beta_2), \dots, M(\alpha_p,\beta_p))$ avec $(\alpha_k,\beta_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour $1 \leq k \leq p$.

ii) Il existe un polynôme réel à racines simples complexes non réelles annulé par A.

iii) Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 stable par A possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A.

III.A

Dans cette section **III.A**, on montre que (i)⇒(ii).

III.A.1 . Montrer que si $\alpha,\beta \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, le polynôme $(X-\alpha)^2+\beta^2$ ne possède que des racines simples complexes non réelles.

III.A.2 . En déduire que (i)⇒(ii).

III.B

Dans cette section **III.B**, on montre que (ii)⇒(iii). On suppose donc que A vérifie (ii). Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 et stable par A. Soit (f_1,f_2) une base de E que l'on complète en une base $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

III.B.1 . Montrer que dans la base $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme canoniquement associé à A a une matrice s'écrivant par blocs : $\begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A' \in \mathcal{M}_2$.

III.B.2 . Vérifier que A' ne possède pas de valeur propre réelle et en déduire que A' est semblable à une matrice du type $M(\alpha,\beta)$ avec $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

III.B.3 . Montrer que E est inclus dans $\text{Ker}\,((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$.

III.B.4 . Montrer que $\text{Ker}\,((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$ possède un sous-espace vectoriel supplémentaire stable par A dans $\mathbb{R}^n$.

III.B.5 . En utilisant une technique analogue à celle vue dans les parties **II.A.3** et **II.A.4**, montrer que E possède un supplémentaire stable par A dans $\text{Ker}\,((A-\alpha I_n)^2+\beta^2 I_n)$, puis conclure que(iii) est réalisé.

III.C

En raisonnant par récurrence, montrer que (iii)⇒(i).

III.D

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ En admettant que A annule $(X^2+1)(X^2-4X+5)$, déterminer une matrice inversible M de $\mathcal{M}_4$ et des réels α, β ,α' et β' tels que $A = M \begin{pmatrix} M(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & M(\alpha',\beta') \end{pmatrix} M^{-1}$.