⁂ BANQUE FILIERE PT ⁂

Epreuve de Mathématiques I-B

durée 4h

On désigne par

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0,
- $\mathbb{R}$: le corps des nombres réels,
- E : l'algèbre des (fonctions) polynômes d'une variable à coefficients réels,
- E_n : le sous-espace vectoriel de E formé des (fonctions) polynômes de degré inférieur ou égal à n et de la fonction nulle.

On note w l'application de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$.

PARTIE I

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations

$$T_0(x)=1,$$
$$T_1(x)=x,$$
$$T_n(x)=2x\,T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad\text{pour tout } n\geq 2.$$

1°) Quel est le degré de T_n ? Quel est le coefficient du terme de plus haut degré de T_n ?
Quelle est la parité de T_n ?

2°) Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ et tout réel θ,

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta).$$

3°) Préciser les valeurs de $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
Déterminer les zéros de T_n et les extremums locaux de T_n.
(on pourra commencer par rechercher ces zéros dans $[-1,1]$).

PARTIE II

1°) Soit $\varphi : [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
L'intégrale $\int_{-1}^{1} w(x)\varphi(x)\,dx$ est-elle convergente ?

2°) Pour tout couple (P, Q) de E^2, on pose :

$$< P, Q > = \int_{-1}^{1} w(x)P(x)Q(x)\,dx$$

Montrer que l'on munit ainsi E d'une structure d'espace préhilbertien.

3°) Calculer, pour tout couple $(i\,,j)$ de $\mathbb{N}^2$, $< T_i\,, T_j >$.
Que conclure ?

4°) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E vérifiant les conditions suivantes :

i) Q_n est de degré n,
ii) $< Q_i, Q_j > = 0$ si $i \neq j$.

a) Montrer que $(Q_i)_{0\le i\le n-1}$ est une base de E_{n-1}.
En déduire que Q_n est orthogonal à tout élément de E_{n-1}.

b) En déduire qu'il existe une suite de réels non nuls $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$Q_n = \alpha_n\ T_n$.

5°) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, continue, et de classe C^1 par morceaux. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout x de $[-1,1]$, on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x)$$

Comment les coefficients a_n s'expriment-ils à l'aide de f ?
(on pourra considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(\theta) = f(\cos\theta)$)

PARTIE III

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $P \in E_n$, on pose

$$u_n(P)(x) = (1-x^2)\,P''(x) - x\,P'(x)\,.$$

où P' et P'' désignent les dérivées (respectivement première et seconde) de P.

1°) Montrer que $u_n : P \mapsto u_n(P)$ est un endomorphisme de E_n.

2°) Ecrire la matrice de u_n dans la base canonique $(x^i)_{0 \leq i \leq n}$ de E_n.
En déduire les valeurs propres de u_n.

3°) Déterminer les sous-espaces propres de u_n , en précisant pour chacun une base.
(On remarquera que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y(\theta) = \cos(k\theta)$ est solution de
$y'' + k^2 y = 0$)

4°) Montrer que u_n est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire défini dans la partie II.

PARTIE IV

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n : $]-1,1[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = (1 - x^2)^{n - 1/2}$$

1°) Montrer qu' il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$f_n^{(n)}(x) = w(x)\ P_n(x)$$

(On pourra, par exemple, remarquer que $f_n(x) = (1 - x)^{n - 1/2} . (1 + x)^{n - 1/2}$)

2°) Déterminer les deux fonctions rationnelles R et S telles que

$$w'(x) = R(x)\, w(x) \quad \text{et} \quad w''(x) = S(x)\, w(x)$$

3°) Montrer que :

$$(1-x^2) f_n'(x) + (2n-1)\, x f_n(x) = 0$$

En déduire que :

$$(1-x^2) f_n^{(n+2)}(x) - 3\, x f_n^{(n+1)}(x) + (n^2 - 1) f_n^{(n)}(x) = 0$$

4°) Montrer enfin que P_n est un vecteur propre de l'endomorphisme u_n défini en partie III.
Les deux vecteurs P_n et T_n sont-ils liés ?

PARTIE V

1°) $\alpha \in]0, \pi[$ étant fixé, on définit, pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\varphi_p : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ par les relations :

$$\varphi_p(\theta) = \frac{\cos(p\theta) - \cos(p\alpha)}{\cos(\theta) - \cos(\alpha)} \quad \text{si } \theta \neq \alpha$$

$$\varphi_p(\alpha) = p\frac{\sin(p\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

a) Vérifier que φ_p est continue.

b) Montrer que :

$$\int_0^\pi \varphi_1(\theta)\, d\theta = \pi\varphi_1(\alpha) \text{ et } \int_0^\pi \varphi_2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2}\varphi_2(\alpha).$$

c) Etablir la relation :

$$\varphi_p(\theta) = 2\cos(\alpha)\,\varphi_{p-1}(\theta) - \varphi_{p-2}(\theta) + 2\cos((p-1)\theta),$$

pour tout entier $p \geq 3$.

d) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, $\int_0^\pi \varphi_p(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{p}\varphi_p(\alpha)$

On suppose n fixé et on pose, pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$,

$$L_k(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{x - x_k}$$

où $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est l'ensemble des zéros de T_{n+1} (classés, par exemple, par valeurs croissantes).

2°) Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n.

Soit $P \in E_n$: écrire P dans la base $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$. On exprimera les coefficients de cette décomposition à l'aide des nombres $P(x_k)$ et $L_k(x_k)$ où $0 \leq k \leq n$.

3°) a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in E_n$, on a :

$$\int_{-1}^{1} w(x)P(x)\, dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P(x_k).$$

b) Montrer que l'égalité précédente reste vraie pour tout polynôme $P \in E_{2n+1}$.