⋆ Banque filière PT ⋆

Épreuve de Mathématiques II-B

Durée 4 h

L'usage des machines à calculer est interdit.

Toutes les réponses seront justifiées.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction

Dans tout le problème, p, q et f désignent trois fonctions définies et continues sur $[0,1]$ telles que p est de classe C^1 (continûment dérivable) sur $[0,1]$ et vérifiant :

$$\forall x \in [0,1], p(x) > 0 \quad \text{et} \quad q(x) \geqslant 0.$$

I. Préliminaires.

1. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et dont la norme euclidienne associée est notée $\|\ \|$. Prouver que :
$$\forall (x,y) \in E^2, 2\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.$$

2. a. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\forall (x,y) \in E^2, |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\ \|y\|.$$
(On pourra s'intéresser à la fonction $\lambda \mapsto \|\lambda x + y\|^2$ de la variable réelle λ.)

   b. Montrer que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\ \|u\|$ si et seulement si $\{x,y\}$ est une famille liée de E.

   c. En déduire que si f et g sont deux fonctions réelles continues sur $[0,a]$ (où a est un réel strictement positif),
$$\left|\int_0^a f(t)g(t)\ \mathrm{d}\,t\right| \leqslant \sqrt{\left(\int_0^a f^2(t)\ \mathrm{d}\,t\right)\left(\int_0^a g^2(t)\ \mathrm{d}\,t\right)}.$$

3. Soit E un espace vectoriel réel, N une application de E dans $\mathbb{R}$ à valeurs positives ou nulles et vérifiant $\forall x \in E, N(x) = N(-x)$.

   On pose $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(N^2(x+y) - N^2(x) - N^2(y)\right)$ et on suppose que φ est un produit scalaire.

   Après avoir vérifié que $N(0_E)$ est nul (où 0_E désigne l'élément nul de E), prouver que N est la norme euclidienne associée à φ.

II. Équivalence de normes.

1. Justifier l'existence de trois réels positifs p_0, p_1 et q_1 tels que :
$$\forall x \in [0,1], 0 < p_0 \leqslant p(x) \leqslant p_1 \text{ et } q(x) \leqslant q_1.$$

2. Soit H l'espace vectoriel réel formé des fonctions réelles de classe C^1 sur $[0,1]$ s'annulant en 0 et 1, c'est-à-dire :
$$H = \left\{u \in C^1([0,1],\mathbb{R}), u(0) = u(1) = 0\right\}.$$
Pour tout couple (u,v) de fonctions de H, on pose :
$$\langle u,v\rangle = \int_0^1 \left(u(t)v(t) + u'(t)v'(t)\right)\ \mathrm{d}\,t,$$
$$b(u,v) = \int_0^1 \left(q(t)u(t)v(t) + p(t)u'(t)v'(t)\right)\ \mathrm{d}\,t,$$
$$L(v) = \int_0^1 f(t)v(t)\ \mathrm{d}\,t.$$

   a. Vérifier que L est une forme linéaire sur H.

b. Montrer que $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$ est un produit scalaire sur H. On pose alors :
$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}.$$

c. Montrer que $(u,v) \mapsto b(u,v)$ est un produit scalaire sur H.

3. a. Prouver, en utilisant la question **I (2) c**, l'existence d'un réel positif γ tel que :
$$\forall v \in H, |L(v)| \leqslant \gamma \|v\|.$$

b. Prouver de même l'existence d'un réel δ strictement positif tel que :
$$\forall (u,v) \in H^2, |b(u,v)| \leqslant \delta \|u\| \ \|v\|.$$

4. a. Prouver à l'aide de la question **I (2) c** que pour toute fonction v de H et pour tout réel x de $[0,1]$
$$v^2(x) \leqslant x \int_0^1 v'^2(t) \ \mathrm{d}\,t.$$

b. En déduire que :
$$\forall v \in H, p_0 \|v\|^2 \leqslant \frac{3}{2} b(v,v).$$

5. Soient u_1 et u_2 des fonctions de H vérifiant $\forall v \in H, b(u_1,v) = L(v) = b(u_2,v)$.
Prouver que $u_1 = u_2$.

6. Soit G l'espace vectoriel réel formé des fonctions réelles continues, C^1 par morceaux s'annulant en 0 et 1, c'est-à-dire :
$$G = \left\{u \in C^0\left([0,1], \mathbb{R}\right), u(0) = u(1) = 0, u \text{ est continue et } C^1 \text{ par morceaux sur } [0,1]\right\}.$$

a. Après avoir rappelé la définition d'une fonction C^1 par morceaux sur $[0,1]$, montrer que $\langle u,v\rangle$ et $b(u,v)$ peuvent être définies lorsque u et v sont éléments de G.

b. Vérifier que $b(v,v) = 0$ avec $v \in G$ si et seulement si $\forall x \in [0,1], v(x) = 0$.

On admet que $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$ et $(u,v) \mapsto b(u,v)$ sont encore des produits scalaires sur G, et on continue à noter $\| \ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

III. Équation de Sturm-Liouville.

On s'intéresse aux solutions de classe C^2 sur $[0,1]$ de :
$$\forall x \in [0,1], -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(p(x)u'(x)\right) + q(x)u(x) = f(x) \tag{1}$$
vérifiant de plus
$$u(0) = u(1) = 0 \tag{2}$$

On admet dans toute la suite que les fonctions p, q et f sont choisies de telle sorte qu'il existe au moins une solution de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales (2).

1. Résoudre le problème posé lorsque $p(x) = e^{-\alpha x}$ (avec α réel non nul), $q(x) = 0$ et $f(x) = -2\, n_0\, \pi\, \cos(2n_0\pi x)$ (avec n_0 entier naturel non nul).

2. On revient au cas général. Soit u une solution du problème posé (c'est-à-dire vérifiant (1) et (2)), prouver que :
$$\forall v \in H, b(u,v) = L(v) \tag{3}$$
En déduire que l'équation (3) admet une unique solution u dans H.

3. On pose, pour tout élément v de H, $J(v) = \dfrac{1}{2} b(v,v) - L(v)$ et on désigne par u l'unique solution de (3) dans H.

a. En calculant $J(u+w)$ avec $w \in H$, prouver que :
$$\forall v \in H, J(u) \leqslant J(v).$$

b. Réciproquement, soit u_0 un élément de H tel que $\forall v \in H, J(u_0) \leqslant J(v)$.
Établir, en calculant $J(u_0 + \lambda w)$ pour tout réel λ, que :
$$\forall w \in H, b(u_0, w) = L(w).$$

u est donc l'unique fonction de H réalisant le minimum de J sur H.

4. On désigne par W un sous-espace vectoriel de G de dimension d de base $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$ et par π_W la projection orthogonale sur W pour le produit scalaire b.

a. Montrer que $\forall w \in W, b(\pi_W(u) - u, \pi_W(u) - u) \leqslant b(w - u, w - u)$.

b. Prouver que $u_W = \pi_W(u)$ si et seulement si u_W est élément de W et vérifie
$$\forall v \in W, b(u_W, v) = L(v).$$

c. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ les composantes de u_W dans la base $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant d}$. Montrer que ces composantes sont solutions du système :

$$\forall i \in [|1, d|], \sum_{j=1}^{d} b(\varphi_i, \varphi_j)\alpha_j = L(\varphi_i). \tag{4}$$

Prouver que ce système est un système de Cramer.

IV. Approximations de la solution u.

Soit n un entier naturel non nul : on pose $h = \dfrac{1}{n+1}$ et pour tout entier naturel i, $x_i = ih$. De plus, pour i compris entre 1 et n, on désigne par φ_i la fonction définie par :
$$\begin{cases} x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow \varphi_i(x) = 1 - \dfrac{|x - x_i|}{h} \\ x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow \varphi_i(x) = 0 \end{cases}$$

1. a. Tracer le graphe d'une fonction φ_i et vérifier que pour tout i, φ_i est élément de G.

b. Soit W_n le sous-espace de G engendré par la famille $\{\varphi_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$.
Soit $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i \varphi_i$ un élément de W_n. Quelle est la valeur de t_i ? En déduire que les fonctions $(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ forment une base de W_n.

c. Prouver que si $|j - i| \geqslant 2$, $b(\varphi_i, \varphi_j) = 0$.

2. Dans cette question, $p(x) = e^{-\alpha x}$ (avec α réel non nul) et $q(x) = 0$.

a. Calculer $b(\varphi_i, \varphi_j)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

b. Calculer alors le déterminant du système (4) lorsque $n = 2$ et retrouver que dans ce cas particulier ce système est un système de Cramer.

3. On pose $w_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u(x_i)\varphi_i$.

a. Établir l'égalité suivante, pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$:
$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], u(x) - w_n(x) = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_y^t u''(z) \, \mathrm{d}\, z \right) \mathrm{d}\, y \right) \mathrm{d}\, t.$$

b. En déduire à l'aide d'une inégalité donnée par la question **I (2) c** que :
$$\forall x \in [x_{i-1}, x_i], |u(x) - w_n(x)| \leqslant h^{3/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(u''(z)\right)^2 \, \mathrm{d}\, z \right)^{1/2}.$$

c. Prouver de même que :

$$\forall x \in \left]x_{i-1}, x_i\right[\,, |u'(x) - w_n'(x)| \leqslant h^{1/2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(u''(z)\right)^2 \; \mathrm{d}\, z \right)^{1/2}.$$

4. Montrer alors que :

$$\|u - w_n\| \leqslant \frac{\sqrt{5}h}{2} \left(\int_0^1 \left(u''(z)\right)^2 \; \mathrm{d}\, z \right)^{1/2}.$$

Quelle interprétation vous suggère cette inégalité ?

Rappel : $\| \ \|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \ , \ \rangle$.

V. Appendice.

Ce problème provient de la modélisation des vibrations de cordes fixées aux deux extrémités. La recherche d'une solution sous forme de série conduit à la résolution d'un problème de Sturm-Liouville où u est le déplacement vertical en un point d'abscisse x, p et q sont des caractéristiques de la corde et f est liée aux forces appliquées à la corde.