Concours Communs Polytechniques - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de mathématiques 1
Filière MP

Normes, fonctions définies par une intégrale, intégrales curvilignes et séries de fonctions

Corrigé par M.TARQI-htpp :// alkendy.x10.mx

EXERCICE 1 : NORMES ÉQUIVALENTES

1. (a) On a $\|0\| = 0$. Soit $f \in E$ tel que $\|f\| = 0$, alors $|f(0)| = \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt = 0$ et comme $|f'|$ est continue et positive sur $[0,1]$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $\ f'(t) = 0$ et donc f est constante, or $f(0) = 0$, donc f est nulle sur $[0,1]$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, on a :
$$\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |\lambda f'(t)|dt = |\lambda|(|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|dt) = |\lambda|\|f\|.$$
Enfin si f et g sont dans E, on a :
$$\begin{aligned}\|f+g\| &= |(f+g)(0)| + 2\int_0^1 |(f+g)(t)|dt \\ &\leq |f(0)| + 2\int_0^1 |f(t)|dt + |g(0)| + 2\int_0^1 |g(t)|dt = \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$
Conclusion : $\|.\|$ est bien une norme sur E.

   (b) i. Deux normes N et N' sur E sont dites équivalentes s'il existe deux nombres réels $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ tels que :
$$\forall x \in E, \ \ k_1 N'(x) \leq N(x) \leq k_2 N'(x).$$
   ii. On vérifie facilement que, pour tout $f \in E$, $\frac{1}{2}\|f\|' \leq \|f\| \leq 2\|f\|'$, donc les deux normes sont équivalentes.

2. Les applications suivantes :
$$f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \quad f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$
définissent des normes sur E, mais ils ne sont pas équivalentes, en effet, en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n(1-nx)$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et 0 si $x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]$, on a $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = 2n$, donc $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1}$ n'est pas bornée.

EXERCICE 2 : CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

1. Soit g est une application continue de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que , pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J, et φ une fonction positive intégrable sur J. Alors si pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|g(x,t)| \leq \varphi(t)$, la fonction
$$f : x \longmapsto \int_J g(x,t)dt$$
définit une fonction continue sur I.

2. La fonction $(x,t) \longmapsto g(x,t) = \dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}$ vérifie les hypothèses de la question précédente avec $I = \mathbb{R}$, $J = [0,+8[$ et $\varphi(x,t) = \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$, donc f_1 est continue sur $\mathbb{R}$

3. $f_2(0) = 0$ et si $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt = \left[-e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = 1$. Donc $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$, fonction qui n'est pas continue à droite en 0. L'hypothèse de domination est donc nécessaire.

Exercice 3 : Une intégrale curviligne

En coordonnées polaires, en posant $x = \cos t$ et $y = \sin t$, l'intégrale curviligne devient :

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} [\cos t(\cos t) - \sin t(-\sin t)]dt = 2\pi.$$

Problème : Comparaison de convergences

Parti I

1. (a) La série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente, où $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

   (b) Pour tout $x \in I$, on a $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ et comme la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, donc elle est de même de la série $\sum |f_n(x)|$.

2. Pour tout $x \in I$, on a :

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$$

qui est le reste d'une série convergente, et donc tend vers 0, et ceci indépendamment de x, donc la convergence est uniforme.

3. Soit $x \in [0,1]$ fixé. La suite $\left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante, positive et tend vers 0, donc la série alternée $\sum (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$ est convergente, d'après le critère spécial des séries alternées.

   Toujours d'après le théorème des séries alternées, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n+1}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{n+2}{(n+1)^2}$$

   Inégalité qui montre que la série $\sum (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$ est uniformément convergente sur $[0,1]$.

   Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Donc la série $\sum |f_n(x)|$ converge si et seulement si la série $\sum \frac{1}{n}$ converge, donc la série $\sum f_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

4. Pas nécessairement, par exemple, la série $\sum x^n(1-x)$ converge absolument sur $[0,1[$ (vers 1), mais ne converge pas uniformément sur $[0,1[$, car pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = x^{n+1}$, donc $\sup_{x\in[0,1[} |R_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0.

Partie II

On désigne par $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x \in [0,1[$ la suite des restes partielles associée à $\sum \alpha_n x^n(1-x)$, c'est une suite à termes positifs.

5. La suite $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante et positive, donc minoré et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq u_0$, la suite $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bornée.
Soit $M = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\alpha_n|$. Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_n(x)| \leq (1-x)Mx^n.$$

La série géométrique $\sum x^n$ étant convergente ($x \in [0,1[$), donc par comparaison, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, donc elle est convergente.

6. (a) Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n'(x) = \alpha_n x^{n-1}(n-(n+1)x)$, donc le sup est atteint en $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ et sa valeur est $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

   (b) On a $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{1}{e}\dfrac{\alpha_n}{n}$, donc la série $\sum f_n$ est normalement convergente si et seulement sila série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente ou encore si et seulement si la série numérique $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ est convergente.

7. (a) Pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = x^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.

   (b) Pour tout $x \in I$, on a l'inégalité :

$$|R_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leq \alpha_{n+1}x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

   Cette inégalité montre que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1[$.

   (c) Pour tout $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^{k+1} \\
&= \alpha_{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) x^k \\
&\geq \alpha_{n+1} x^{n+1},
\end{aligned}
$$

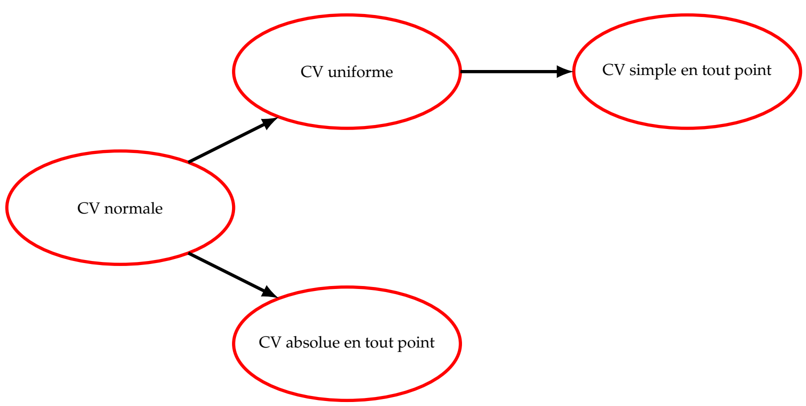
car $\alpha_k \leq \alpha_{k-1}$, donc $0 \leq \alpha_{n+1} \leq \sup_{x\in[0,1[} |R_n(x)|$ et donc la convergence uniforme de la série $\sum f_n$, entraîne la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0.

8. (a) La série $\sum \frac{x^n}{n^2}(1-x)$ converge normalement sur $[0,1[$ ($\alpha_n = \frac{1}{n^2}$), car pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \frac{x^n(1-x)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

   (b) La série $\sum x^n(1-x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$ ($\alpha_n = 1$), car pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = x^{n+1}$, donc $\sup_{x\in[0,1[} |R_n(x)| = 1$ ne tend pas vers 0.

   (c) La série $\sum \frac{x^n}{\ln(n+1)}(1-x)$ converge uniformément mais ne converge pas normalement sur $[0,1[$. ($\alpha_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$), car $\|f_n\|_\infty \sim \frac{e^{-1}}{n\ln(n)}$, c'est le terme général d'une série divergente, série de Bertrand !, cependant elle converge uniformément sur $[0,1[$ d'après la question 7.b.

9. Les différentes implications possibles :



•••••••••