Corrigé de l'épreuve Math 1 de CCP, PSI 2011

Luc Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes.

Partie I Une étude de séries.

Question I. 1. 1. Pour $k \geqslant 1$, considérons la série entière de terme général $u_k(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$.

Pour $x > 0$, on a $\left|\dfrac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\dfrac{k\,x}{k+1}\right| \to x$ quand $k \to \infty$, donc. avec le critère de d'Alembert, si $x > 1$, on a absolue convergence de $\sum u_k(x)$ et si $x > 1$, on a divergence grossière de cette même série.

Ainsi $\boxed{R = 1}$, et la somme totale de la série entière est définie et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

En $x = 1$, la série $\sum u_k(1)$ est une série de Riemann alternée vérifiant le thm spécifique (car $|u_k(1)| \to 0$ en décroissant) donc convergente. En $x = -1$, la série $\sum u_k(-1)$ est la série harmonique $\sum \dfrac{1}{k}$ divergente.

$\boxed{L \text{ est définie sur }]-1,1]}$. On reconnaît le D.S.E. de $\ln(1+x)$, et $\boxed{L(x) = \ln(1+x) \text{ sur }]-1,1[}$

Question I. 1. 2. Pour $x \in [0,1]$, la série numérique $\sum u_k(x)$ est une série **alternée**, car $|u_k(x)| = \dfrac{x^k}{k}$.

Cette série alternée vérifie les hypothèses du **thm spécifique** car $|u_k(x)| \to 0$ quand $k \to \infty$, et en décroissant avec $\left|\dfrac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\dfrac{k\,x}{k+1}\right| < 1$. On retrouve ainsi la convergence de la série $\sum u_k(x)$, sur $[0,1]$, que l'on a déjà assurée, et le résultat complémentaire que le reste est majoré : $|L(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$

Ainsi, pour $n \geqslant 1$, en notant $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$, on a : $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \ |L(x) - S_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$

Cette fonction est $\boxed{\text{bornée, et } N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$ Quand $n \to \infty$, on a donc que $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \to 0$,

et on a assuré **la convergence uniforme** de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$ vers L. Les S_n, qui sont des polynômes (sommes partielles d'une série entière) sont continues, et par le thm de continuité sous convergence uniforme,

$\boxed{L \text{ est continue sur } [0,1]}$ Alors $L(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1^-} L(x) = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x)$ donc $\boxed{L(1) = \ln(2)}$

Question I. 2. 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{q=1}^{q=p} a_{3q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+2}$ en distinguant les entiers k modulo 3.

$$\text{Donc} \sum_{k=1}^{k=3p} a_k = -\frac{2}{3}\sum_{q=1}^{q=p}\frac{1}{q} + \sum_{q=0}^{q=p-1}\frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1}\frac{1}{3q+2} = -\sum_{q=1}^{q=p}\frac{1}{q} + \sum_{q=1}^{q=p}\frac{1}{3q} + \sum_{q=0}^{q=p-1}\frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1}\frac{1}{3q+2}$$

$$= -\sum_{k=1}^{k=p}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{k=3p}\frac{1}{k}$$ en retrouvant, cette fois, tous les entiers k modulo 3.

Et $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{k=3p}\frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{h=2p}\frac{1}{p+h} = \frac{1}{p}\sum_{h=1}^{h=2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}}}$ par changement d'indice $k = p + h$, et factorisation de $\dfrac{1}{p}$.

Question I. 2. 2. Une **somme de Riemann** de la fonction f sur le segment $[a,b]$, qu'on partage en subdivision équidistante, est $SR_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n} f\left(a + h\,\frac{b-a}{n}\right)$, et on sait que pour f continue sur $[a,b]$, la suite $(SR_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Il en est de même de la **suite extraite** $(SR_{2p}(f))_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Pour $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ le segment $[a,b] = [0,2]$ et $n = 2p$, on a donc que $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{p}$ et $a + h\,\dfrac{b-a}{n} = 1 + \dfrac{h}{p}$

$\boxed{\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\sum_{h=1}^{h=2p}\frac{1}{1+\frac{h}{p}} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(3)}$ Notons A_n la somme partielle de $\sum a_n$: $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_k$.

On vient de montrer que $\displaystyle\lim_{p\to\infty} A_{3p} = \ln(3)$

Les deux suites de termes généraux $A_{3p+1} = A_{3p} + \dfrac{1}{3p+1}$ et $A_{3p+2} = A_{3p} + \dfrac{1}{3p+1} + \dfrac{1}{3p+2}$ ont même limite, et les 3 suites extraites $(A_{3p})_{p\in\mathbb{N}^*}$, $(A_{3p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(A_{3p+2})_{p\in\mathbb{N}}$ tendent vers la même limite $\ln(3)$.

Ce qui assure que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et que $\boxed{\text{la série } \sum a_n \text{ converge vers sa somme totale } \ln(3)}$

Question I. 2. 3. Le réel $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ vaut selon la classe de k modulo 3 : $\begin{cases} \text{si } k = 3p : \cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) = 1 \\ \text{si } k = 3p+1 : \cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \\ \text{si } k = 3p+2 : \cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}a_k$, série qui converge et $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}\cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln(3) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Question I. 3. 1. Pour $t \in \,]0, 2\pi[$, on a $\mathrm{e}^{it} \neq 1$ et $S_n(t)$ qui apparaît comme la somme des termes successifs de la suite géométrique de raison e^{it}, vaut donc $\boxed{S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{e}^{it})^k = \dfrac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{(n+1)it}}{1 - \mathrm{e}^{it}} = \varphi(t)\left[\mathrm{e}^{(n+1)it} - \mathrm{e}^{it}\right] \text{ sur }]0, 2\pi[}$

Question I. 3. 2. Sur $]0, 2\pi[$ le dénominateur de φ est non nul et de classe C^∞, avec $\mathrm{e}^{it} - 1 = \cos(t) - 1 + i\sin(t)$.
La fonction φ est donc C^1 sur $]0, 2\pi[$ et sur le segment $[\pi, \alpha]$.

D'ailleurs $\varphi(t) = \dfrac{\cos(t) - 1 - i\sin(t)}{(\cos(t)-1)^2 + \sin^2(t)} = -\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sin(t)}{2(1-\cos(t))}$ en séparant parties réelle et imaginaire.

Note : L'hypothèse $\alpha \in [\pi, 2\pi[$ ne sert que pour l'écriture sans ambiguïté des segments $[\pi, \alpha]$, qu'on devrait écrire, à strictement parler, $[\alpha, \pi]$ si $0 < \alpha < \pi$, dans les questions suivantes.

Question I. 3. 3. Puisque φ est C^1 sur le segment $[\pi, \alpha]$, ainsi que la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{(n+1)it}$, on peut effectuer une intégration par partie : $\displaystyle\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)}{(n+1)i}\right]_{t=\pi}^{t=\alpha} - \int_\pi^\alpha \frac{\mathrm{e}^{(n+1)it}}{(n+1)i}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi, \alpha]$ donc bornées, respectivement par $M_\varphi = \sup\limits_{[\pi,\alpha]}|\varphi(t)|$ et
$M_{\varphi'} = \sup\limits_{[\pi,\alpha]}|\varphi'(t)|$

et ainsi : $\displaystyle\left|\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\left[\frac{\mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)}{(n+1)i}\right]_{t=\pi}^{t=\alpha}\right| + \left|\int_\pi^\alpha \frac{\mathrm{e}^{(n+1)it}}{(n+1)i}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2M_\varphi}{n+1} + \frac{|\alpha-\pi|M_{\varphi'}}{n+1}$

Le numérateur est une constante réelle, donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

Question I. 3. 4. Pour $\alpha \in \,]0, 2\pi[$, $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{kit}\mathrm{d}t\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{e}^{kit}}{ki}\right]_\pi^\alpha = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ki\alpha} - \mathrm{e}^{ki\pi}}{k}$

et $\mathrm{e}^{ki\pi} = (\mathrm{e}^{i\pi})^k = (-1)^k$ donc $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = -i\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ki\alpha}}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right]$

Mais aussi avec **I. 3. 1.** on a $\displaystyle\int_\pi^\alpha S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$

Ainsi : $\boxed{\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ki\alpha}}{k} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + i\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{(n+1)it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t - i\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t}$

On a assuré l'existence des limites des termes de droite quand $n \to \infty$, on assure donc la convergence de la série et la valeur de sa somme totale : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{ki\alpha}}{k} = -\ln(2) - i\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t}$

Question I. 3. 5. Pour tout $t \in \,]0, 2\pi[$, on a $\mathrm{e}^{it} \neq 1$ et $\mathrm{e}^{it}\varphi(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{-i\frac{t}{2}}(\mathrm{e}^{it} - 1)} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}}}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Question I. 3. 6. Ainsi $\mathrm{e}^{it}\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $\displaystyle\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\alpha-\pi) - i\left[\ln\left(\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=\pi}^{t=\alpha}$

$\displaystyle\int_\pi^\alpha \mathrm{e}^{it}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\alpha-\pi) - i\ln\left(\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. En séparant parties réelle et imaginaire, on a montré la convergence des deux séries et calculé leurs sommes totales :

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi-\alpha}{2}}$ ce qui est vrai pour $\alpha \in\ ]0,2\pi[$, en échangeant les bornes des intégrales.

En particulier pour $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\ln\left(\sqrt{3}\right)$

on retrouve ainsi le résultat de **I. 2. 3.** **Note** : pour $\alpha = \pi$, on retrouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Partie II Limite d'une intégrale.

Question II. 1. Si g est bornée par $M_g = \sup\limits_{[0,\infty[}|g(t)|$, alors pour $x>0$, on a $|f(t)\,g(xt)| \leqslant M_g|f(t)|$ si $t\in[0,\infty[$.

Puisque l'intégrale $\int_0^\infty |f(t)|\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_0^\infty |f(t)\,g(xt)|\,\mathrm{d}t$ converge et $\boxed{\widetilde{f_g}(x) \text{ existe pour tout } x>0}$

De plus la fonction $\varphi_0 : t \mapsto M_g|f(t)|$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0,\infty[$, elle domine la fonction à deux variables : $F_g : (x,t) \mapsto f(t)\,g(xt)$, qui est continue par rapport à x à t fixé et continue par morceaux par rapport à t , à x fixé. On a ainsi les hypothèses du thm de continuité des intégrales à paramètres sous domination : $\boxed{\widetilde{f_g} \text{ est continue sur }]0,\infty[}$. Enfin : $\forall x>0,\ \left|\widetilde{f_g}(x)\right| \leqslant \int_0^\infty |f(t)\,g(xt)|\,\mathrm{d}t \leqslant M_g\int_0^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t$

donc $\boxed{\widetilde{f_g} \text{ est bornée sur }]0,\infty[}$

Question II. 2. 1. Si g est la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{it}$, on a les hypothèses, de la question précédente, avec $M_g = 1$.

Par définition de la convergence d'une intégrale : $\int_0^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t$ donc $\lim\limits_{A\to\infty}\int_A^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$

et pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A>0$, tel que $0\leqslant \int_A^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$

Question II. 2. 2. Pour A ainsi fixé, on peut effectuer une intégration par partie, puisque les fonctions sont C^1 sur le segment $[0,A]$: $\displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{ixt}f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{ixt}}{ix}f(t)\right]_{t=0}^{t=A} - \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{ix}f'(t)\,\mathrm{d}t$

Ainsi $\displaystyle\left|\int_0^A \mathrm{e}^{ixt}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|f(A)|+|f(0)|}{x} + \frac{1}{x}\int_0^A |f'(t)|\mathrm{d}t$ et puisque A est fixé, le majorant est de la forme $\dfrac{K}{x}$

où K est constante. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{ixt}f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

Question II. 2. 3. Assurons que $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\widetilde{f_g}(x)\right| = 0$, en montrant que $\left|\widetilde{f_g}(x)\right|$ peut être majoré par n'importe quel $2\varepsilon>0$, pour x suffisamment grand. Considérons donc $\varepsilon>0$, quelconque mais fixé.

- Pour ce $\varepsilon>0$, avec **II. 2. 1.** il existe $A>0$, tel que $\forall x>0,\ \left|\int_A^\infty \mathrm{e}^{ixt}f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$
- Pour un A ainsi choisi, il existe $x_0>0$, tel que $\forall x\in\ ]0,\infty[,\ \left(x\geqslant x_0\right) \Rightarrow \left(\left|\int_0^A \mathrm{e}^{ixt}f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right)$

Alors, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $x_0>0$, tel que $\forall x\in\ ]0,\infty[,\ \left(x\geqslant x_0\right) \Rightarrow \left(\left|\int_0^\infty \mathrm{e}^{ixt}f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon\right)$.

On a donc montré que $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left|\widetilde{f_g}(x)\right| = 0}$

Question II. 3. 1. Si g est la fonction $t\mapsto|\sin(t)|$, on a les hypothèses de **II. 1.**, avec $M_g = 1$.

Pour $f=E$, la fonction E est C^1 sur $[0,\infty[$, à valeurs réelles et $\int_0^\infty |E(t)|\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

La conclusion de **II. 2. 3.** est assurée. On peut calculer $\theta(\gamma)$ de **deux façons différentes** :

- En calculant $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\,\mathrm{e}^{iy}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\gamma+i)y}}{\gamma+i}\right]_{y=0}^{y=\pi}$ car $\gamma - i \neq 0$.

D'où $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\,\mathrm{e}^{iy}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\gamma+i}\Big[\mathrm{e}^{(\gamma+i)\pi}-1\Big] = \frac{i-\gamma}{\gamma^2+1}\Big[\mathrm{e}^{\gamma\pi}+1\Big]$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\sin(y)\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^{\gamma\pi}+1}{\gamma^2+1}}$

- En effectuant deux intégrations par partie successives, les fonctions étant C^1 sur le segment $[0,\pi]$:

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\sin(y)\,\mathrm{d}y = \Big[\,\mathrm{e}^{\gamma y}(-\cos(y))\,\Big]_{y=0}^{y=\pi} + \gamma\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\cos(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\gamma\pi}+1+\gamma\Big[\Big[\,\mathrm{e}^{\gamma y}(\sin(y))\,\Big]_{y=0}^{y=\pi} - \int_0^\pi \gamma\,\mathrm{e}^{\gamma y}\sin(y)\,\mathrm{d}y\Big]$$

d'où $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\sin(y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{\gamma\pi}+1-\gamma^2\int_0^\pi \mathrm{e}^{\gamma y}\sin(y)\,\mathrm{d}y$ et le même résultat.

Question II. 3. 2. On a $\displaystyle\widetilde{E}(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t$, intégrale convergente (**II. 1.**) dans laquelle on peut effectuer le changement de variable $\begin{pmatrix} u = xt \\ t\in\,]0,\infty[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t = \frac{1}{x}u \\ u\in\,]0,\infty[\end{pmatrix}$ qui est C^1-difféomorphe entre ces intervalles, donc conserve la convergence des intégrales et leur valeur.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,|\sin(u)|\,\mathrm{d}u \text{ pour tout } x>0}$

Question II. 3. 3. Avec le changement de variable (translation) $v = u-k\pi$, pour tout $x>0$,

on a $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{v+k\pi}{x}}\,|\sin(v)|\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{v}{x}}\sin(v)\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}\,\theta\Big(-\frac{1}{x}\Big)$

Question II. 3. 4. On note $u_k = \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}} = \Big(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}\Big)^k$, alors $\sum u_k$ est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}\in\,]0,1[$

donc absolument convergente, et sa somme totale est $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}}$ pour tout $x>0$.

Question II. 3. 5. Avec la règle de Chasles, on peut décomposer l'intégrale sur $[0,(n+1)\pi]$ en somme totale d'une série d'intégrales sur les segments $[k\pi,(k+1)\pi]$, ainsi , pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\int_0^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-t}\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{k=n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-t}\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{k=n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-\frac{u}{x}}\,|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\theta\Big(-\frac{1}{x}\Big)\sum_{k=0}^{k=n}\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{x}}$$

Quand $n\to\infty$: $\boxed{\displaystyle\widetilde{E}(x) = \frac{1}{x}\theta\Big(-\frac{1}{x}\Big)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}} \text{ sur }]0,\infty[}$ ou $\boxed{\displaystyle\widetilde{E}(x) = \frac{x}{x^2+1}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}}}\right) \text{ sur }]0,\infty[}$

Quand $x\to\infty$, $\displaystyle\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{x}} = 1-\frac{\pi}{x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$ et $\displaystyle\widetilde{E}(x) = \Big(\frac{x}{x^2+1}\Big)\left(\frac{2+O(\frac{1}{x})}{\frac{\pi}{x}+O\big(\frac{1}{x^2}\big)}\right)$ d'où $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\widetilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}}$

Question II. 4. 1. a. Notons h_k la fonction $t\mapsto \dfrac{\cos(2kt)}{4k^2-1}$. Pour $k\geqslant 1$, la fonction h_k est paire, π-périodique, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bornée : $\boxed{\displaystyle N_\infty(h_k) = \sup_{\mathbb{R}}|h_k(t)| = \frac{1}{4k^2-1}}$.

La série $\sum \dfrac{1}{4k^2-1}$ est convergente par équivalence à une série de Riemann $\sum\dfrac{1}{4k^2}$ d'exposant $2>1$, donc la série des fonctions $\sum h_k$ est **normalement convergente** sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente : par continuité de chaque h_k, la somme totale $\boxed{h \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}}$

Question II. 4. 1. b. La fonction $g : t\mapsto|\sin(t)|$ est continue, de classe C^1 par morceaux, paire et π-périodique. On peut déterminer son développement en série de Fourier et appliquer le thm complémentaire au thm de Dirichlet, qui assure la convergence normale de la série de Fourier de g vers g, sur $\mathbb{R}$.

Calculons les coefficients de Fourier de g. On a la période $T=\pi$, la pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2$ et :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n(g) = 0$, par parité.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle a_n(g) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|\sin(t)|\cos(n\omega t)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t$, par parité.

$$\text{D'où } a_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)\big]\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{-\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{-\cos((2n-1)t)}{2n-1}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}\right]$$
$$\text{Ainsi } a_n(g) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right] = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-1}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Dans l'introduction, nous avons assuré les hypothèses du thm de Dirichlet qui assure que la série de Fourier de g converge sur $\mathbb{R}$, de somme totale $S(t) = \dfrac{a_0(g)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)\cos(n\omega t) + b_n(g)\sin(n\omega t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$

qui égale $g(t)$ sur $\mathbb{R}$, donc que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(t)}$

Question II. 4. 2. Si de plus f est de classe C^1 sur $[0,\infty[$, on a pour tout $x > 0$:

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^{\infty} f(t)|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}h(xt)\right]\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t)\left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kxt)}{4k^2-1}\right]\mathrm{d}t$$

où l'on voit apparaître l'intégrale d'une série des fonctions $\sum f\,h_k$. Chacune de ces fonctions est C^0 sur $\mathbb{R}$, la série converge simplement (et même normalement) sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto f(t)\,h(xt)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Chacune des fonctions est intégrable, car $|f(t)\,h_k(t)| = \dfrac{|\cos(2kxt)|}{4k^2-1}|f(t)| \leqslant |f(t)|$ intégrable sur $[0,\infty[$ et la série des intégrales $\displaystyle\int_0^{\infty}|f(t)\,h_k(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à la série $\sum \dfrac{K}{k^2}$.

Les divers hypothèses du thm d'intégration terme à terme sont assurées, et on a donc, chaque intégrabilité étant assurée, que $\boxed{\widetilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t \text{ pour tout } x > 0}$

Considérons la série de fonctions $v_k : x \mapsto \dfrac{1}{4k^2-1}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t$ définies et continues sur $]0,\infty[$.

Avec **II. 2. 3.** on sait que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} v_k(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4k^2-1}\int_0^{\infty} f(t)\cos(2kxt)\,\mathrm{d}t = 0$, et $N_\infty(v_k) \leqslant \dfrac{1}{4k^2-1}\displaystyle\int_0^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la série des fonctions $\sum v_k$ converge normalement sur $]0,\infty[$, donc uniformément. On peut donc appliquer le **thm de la double limite** à la suite des sommes partielles, et assurer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 0$.

Enfin, on peut conclure que $\boxed{\lim_{x\to\infty}\widetilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$ Ce qui est conforme au résultat obtenu pour E.

Question II. 4. 3. 1. Si on effectue le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale, pour $0 \leqslant \beta < \delta$, on a :

$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_\beta^\delta |\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_{\beta x}^{\delta x}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u.$$

$\dfrac{\beta x}{\pi}$ et $\dfrac{\delta x}{\pi}$ sont deux réels positifs et pour $x > \dfrac{\pi}{\delta-\beta}$ on a $\dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi} = \dfrac{(\delta-\beta)x}{\pi} > 1$.

Il existe donc deux entiers p et q tels que $\begin{cases} p \text{ partie entière de } \frac{\beta x}{\pi} \text{ donc } p \leqslant \frac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \text{ partie entière de } \frac{\delta x}{\pi} \text{ donc } q \leqslant \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \\ \text{et } 0 \leqslant p < q \end{cases}$

Ainsi $p\pi \leqslant \beta x < (p+1)\pi$ et $q\pi \leqslant \delta x < (q+1)\pi$ donc $\boxed{[(p+1)\pi, q\pi] \subset [\beta x, \delta x] \subset [p\pi, (q+1)\pi]}$

Puisque la fonction qu'on intègre est positive et continue sur $\mathbb{R}$, on a l'encadrement entre les intégrales :

$$\int_{(p+1)\pi}^{q\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\beta x}^{\delta x}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{p\pi}^{(q+1)\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi}|\sin(v)|\,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi}\sin(v)\,\mathrm{d}v = 2$ avec $v = u - k\pi$

Ainsi $\displaystyle\int_{(p+1)\pi}^{q\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = 2(q-p-1)$ et $\displaystyle\int_{p\pi}^{(q+1)\pi}|\sin(u)|\,\mathrm{d}u = 2(q+1-p)$

d'où un encadrement de $F(x)$: $\boxed{\frac{2}{x}(q-p-1) \leqslant F(x) \leqslant \frac{2}{x}(q-p+1) \text{ pour } x > \frac{\pi}{\delta-\beta}}$

Mais $\begin{cases} p \leqslant \dfrac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \leqslant \dfrac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -(p+1) < -\dfrac{\beta x}{\pi} \leqslant -p \\ q \leqslant \dfrac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$ et $\begin{cases} q-p < \dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi} + 1 \\ \dfrac{\delta x}{\pi} - \dfrac{\beta x}{\pi} - 1 < q-p \end{cases}$

ainsi $\frac{2}{x}\left(\frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} - 2\right) \leqslant F(x) \leqslant \frac{2}{x}\left(\frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} + 2\right)$ pour $x > \dfrac{\pi}{\delta - \beta}$ et quand $x \to \infty$, par le thm d'encadrement (thm "des gendarmes" ou "du sandwich"), on a $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} F(x) \text{ existe et vaut } \frac{2}{\pi}(\delta - \beta)}$

Question II. 4. 3. 2. Selon les cas, par extention de résultats successifs.

• Si f est une **fonction en escalier** et J un **segment**, alors il existe une subdivision $(\beta_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de J telle que f soit constante égale à y_k sur chacun des intervalles $]\beta_k, \beta_{k+1}[$.

Donc $\widetilde{f}(x) = \displaystyle\int_J f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} y_k \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} |\sin(xt)|\,\mathrm{d}t$

Cette combinaison linéaire de fonctions ayant des limites quand $x \to \infty$ a une limite qui vaut :

$$\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} y_k \frac{2}{\pi}(\beta_{k+1} - \beta_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} y_k(\beta_{k+1} - \beta_k) \text{ et } \boxed{\lim_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t}$$

• Si f est **continue par morceaux** sur J un **segment**, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément sur J vers f. Ainsi $N_\infty^J(f - \varphi_n) = \sup\limits_J |f(t) - \varphi_n(t)| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Les applications $f \mapsto \widetilde{f}$ et $f \mapsto \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t$ sont linéaires, donc pour la différence (où $x > 0$) :

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\widetilde{f}(x) - \widetilde{\varphi_n}(x)\right] + \left[\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right] + \left[\frac{2}{\pi}\int_J \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \widetilde{f - \varphi_n}(x) + \left[\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right] + \frac{2}{\pi}\int_J [\varphi_n(t) - f(t)]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où $\left|\widetilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n) + \left|\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{2}{\pi} L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n)$

où $L(J)$ est la **longueur** du segment J. Par la convergence uniforme sur J, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0\right) \Rightarrow \left(N_\infty^J(f - \varphi_n) < \dfrac{\varepsilon}{L(J)(1 + \frac{2}{\pi})}\right) \Rightarrow \left(L(J)(1 + \frac{2}{\pi}) N_\infty^J(f - \varphi_n) < \varepsilon\right)$

Pour un $\varepsilon > 0$, fixons donc un tel $n = n_0$. Pour ce n_0, puisque $\lim\limits_{x\to\infty} \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J \varphi_{n_0}(t)\,\mathrm{d}t$, il existe un x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$ on ait $\left|\widetilde{\varphi_{n_0}}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J \varphi_{n_0}(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous assurons qu'il existe $x_0 > 0$, t. q. $\forall x > 0,\ \left(x \geqslant x_0\right) \Rightarrow \left(\left|\widetilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon\right)$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t}$

• Si f est **continue par morceaux** sur $J = [0, \infty[$, on peut reprendre pour un $\varepsilon > 0$ donné, le raisonnement de la question **II. 2.** avec un A suffisamment grand pour que $\int_A^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\quad \left|\widetilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_{[0,\infty[} f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^\infty f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^A f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_A^\infty f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_A^\infty f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^A f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\int_A^\infty |f(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour ce A ainsi choisi, avec le segment $J' = [0, A]$ et le résultat ci-dessus, il existe x_0 tel que

$$\forall x > 0,\ \left(x \geqslant x_0\right) \Rightarrow \left(\left|\int_0^A f(t)\,|\sin(xt)|\,\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\right)$$

et alors $\forall x > 0,\ \left(x \geqslant x_0\right) \Rightarrow \left(\left|\widetilde{f}(x) - \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \left(2 + \frac{2}{\pi}\right)\varepsilon\right)$.

Et on a donc assuré de même que $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \widetilde{f}(x) = \frac{2}{\pi}\int_J f(t)\,\mathrm{d}t}$