J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR. jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

ECRICOME 2006

EXERCICE 1

Partie I : Quelques propriétés de $f^\star$.

1. Soit M la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

MX et ${}^tMY$ sont les matrices de $f(x)$ et de $f^\star(y)$ dans la base othonormée $\mathcal{B}$.

Alors $< f(x), y >= {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY =< x, f^\star(y) >$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \ < f(x), y >=< x, f^\star(y) >.}$$

2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \ < f(x), y >=< x, g(y) >$.

Montrons que $g = f^\star$.

$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \ < x, g(y) >=< f(x), y >=< x, f^\star(y) >$.

Alors $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \ < x, g(y) >=< x, f^\star(y) >$ ou $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \ < x, g(y) - f^\star(y) >= 0$.

Ainsi si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}^3, < x, g(y) - f^\star(y) >= 0$.

Donc si y est un élément quelconque de $\mathbb{R}^3 : g(y) - f^\star(y)$ appartient à $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp$.

Or $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par conséquent $\forall y \in \mathbb{R}^3, \ g(y) - f^\star(y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $\forall y \in \mathbb{R}^3, \ g(y) = f^\star(y)$.

Finalement $g = f^\star$.

$$\boxed{f^\star \text{ est le seul endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ vérifiant } \forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2, \ < f(x), y >=< x, g(y) >.}$$

3. a. Soit x un élément de F et soit y un élément de $F^\perp$. $< x, f^\star(y) >=< f(x), y >$.

Or $f(x)$ appartient à F car x appartient à F qui est stable par f et y appartient à $F^\perp$ donc $< f(x), y >= 0$.

Alors $< x, f^\star(y) >=< f(x), y >= 0$.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est dans } F \text{ et } y \text{ dans } F^\perp \text{ alors } < x, f^\star(y) >= 0.}$$

b. Soit y un élément de $F^\perp$. Ce qui précède montre que $\forall x \in F,\ < x, f^\star(y) >= 0$ donc que $f^\star(y) \in F^\perp$.

Ainsi $\forall y \in F^\perp, f^\star(y) \in F^\perp$. $F^\perp$ est stable par $f^\star$

$$\boxed{\text{Si } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f \text{ alors } F^\perp \text{ est stable par } f^\star.}$$

▲ *Exercice* *E est un espace vectoriel euclidien. Généraliser tous les résultats précédents.*

f et g sont deux endomorphismes de E et λ un réel. Exprimer $(\lambda\, f + g)^\star$ et $(f \circ g)^\star$ en fonction de $f^\star$, $g^\star$ et λ. Déterminer $(f^\star)^\star$.

Que dire de $f^\star$ si f est un automorphisme de E ? ▼

Partie II : Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

1. • Par définition $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

• $\mathcal{E}$ n'est pas vide car $\mathbb{R}^3$ n'est pas vide !

• Soient g et h deux éléments de $\mathcal{E}$ et λ un réel.

Il existe deux éléments $u = (a, b, c)$ et $u' = (a', b', c')$ tels que $g = f_u$ et $h = f_{u'}$.

$\lambda\, g + h = \lambda\, f_u + f_{u'}$ donc la matrice de $\lambda\, g + h$ dans la base $\mathcal{B}$ est : $\lambda\, M_u + M_{u'}$.

Or $\lambda\, M_u + M_{u'} = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ c' & a' & b' \\ b' & c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a + a' & \lambda\, b + b' & \lambda\, c + c' \\ \lambda\, c + c' & \lambda\, a + a' & \lambda\, b + b' \\ \lambda\, b + b' & \lambda\, c + c' & \lambda\, a + a' \end{pmatrix} = M_{\lambda\, u + u'}$.

Ainsi $\lambda g + h$ et $f_{\lambda\, u + u'}$ ont même matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\lambda g + h = f_{\lambda\, u + u'}$. Ce qui montre que $\lambda\, g + h$ appartient à $\mathcal{E}$.

Par conséquent $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (g, h) \in \mathcal{E}^2,\ \lambda\, g + h \in \mathcal{E}$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^3).}$$

2. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}$ est $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

La matrice de $f^\star$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^t M_u = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

La matrice de $f_u^\star$ dans $\mathcal{B}$ est donc $M_{\hat{u}}$ avec $\hat{u} = (a, c, b)$. Ainsi $f_u^\star = f_{\hat{u}}$.

Ce qui permet d'affirmer que $f_u^\star$ est un élément de $\mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ f_u^\star \text{ appartient à } \mathcal{E}.}$$

▲ *Exercice* *Montrer que la composée de deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$ et que deux éléments de $\mathcal{E}$ commutent.* ▼

3. a. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de $f_u(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ou $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a+b+c \\ c+a+b \\ b+c+a \end{pmatrix}$.

Cette matrice est encore $(a+b+c) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Ainsi $f_u(e_1) = (a+b+c)\, e_1$.

Comme e_1 n'est pas le vecteur nul, e_1 est un vecteur propre de f_u et ceci pour tout élément u de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{e_1 \text{ est un vecteur propre commun aux éléments } f_u \text{ de } \mathcal{E}.}$$

▲ *Exercice* *Soit $u = (a, b, c)$. M_u est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$? (on pourra remarquer que $M_u = a\, I_3 + b\, T + c\, T^2$...)* ▲

b. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$f_u(\mathcal{D}) = f_u(\mathrm{Vect}(e_1)) = \mathrm{Vect}\,(f_u(e_1)) = \mathrm{Vect}\,((a+b+c)\, e_1) \subset \mathrm{Vect}(e_1) = \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ est donc stable par f_u.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D} \text{ est stable par } f_u.}$$

c. Soit $u = (a, b, c)$ un élément de $\mathbb{R}^3$. Posons $v = (a, c, b)$.

Rappelons que $f_v^\star = f_{\hat{v}}$ avec $\hat{v} = (a, b, c)$ donc $f_v^\star = f_u$ d'après II 2).

f_v est un élément de $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{D}$ est stable par f_v d'après la question précédente.

La question **I 3. b.** montre alors que $\mathcal{D}^\perp$ est stable par $f_v^\star$ donc par f_u.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } u \text{ de } \mathbb{R}^3,\ \mathcal{D}^\perp \text{ est stable par } f_u.}$$

d. Notons que $D = \mathrm{Vect}(e_1) = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)\right) = \mathrm{Vect}(i+j+k)$.

Notons également que $D^\perp$ est l'orthogonal d'une droite vectorielle donc est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{D}^\perp$ est donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}$.

$x \in \mathcal{D}^\perp \iff < x, i+j+k >= 0 \iff x_1 \times 1 + x_2 \times 1 + x_3 \times 1 = 0 \iff x_1 + x_2 + x_3 = 0$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ est une équation de } \mathcal{D}^{\perp} \text{ dans la base } \mathcal{B}.}$$

e. $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, i - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, j + 0\, k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 = 0$ donc e_2 est un élément de $\mathcal{D}^{\perp}$.

$e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\, i + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\, j - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\, k$ et $\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0$ donc e_3 est un élément de $\mathcal{D}^{\perp}$.

$\mathcal{B} = (i, j, k)$ étant une base orthonormale : $\|e_2\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 1$;

$\|e_3\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{4}{6}} = 1$;

$< e_2, e_3 >= \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{6}} + 0\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0.$

Finalement (e_2, e_3) est une famille orthonormale, donc une famille libre, de cardinal 2 du plan vectoriel $\mathcal{D}^{\perp}$. Ceci suffit pour dire que (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^{\perp}$.

$e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, i + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, j + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, k$ donc $\|e_1\| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1.$

Ainsi (e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$.

(e_1) est une base orthonormale de $\mathcal{D}$, (e_2, e_3) est une base orthonormale de $\mathcal{D}^{\perp}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^{\perp}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et orthogonaux. Ainsi $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{(e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathcal{D}^{\perp} \text{ et } \mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^3.}$$

f. Soit u un élément de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $\mathcal{D}^{\perp} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par f_u.

Par conséquent $f_u(e_1) \in \mathrm{Vect}(e_1)$, $f_u(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ et $f_u(e_3) \in \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

Alors il existe cinq réels e, f, g, h et ℓ tels que $f_u(e_1) = e\, e_1$, $f_u(e_2) = f\, e_2 + h\, e_3$ et $f_u(e_3) = g\, e_2 + \ell\, e_3$.

Alors la matrice N_u de f_u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est : $\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$.

> Si u est un élément de $\mathbb{R}^3$, il existe cinq réels e, f, g, h et ℓ tels que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ soit $N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$.

▲ *Exercice* *Si $u = (a, b, c)$, montrer que :* $N_u = \begin{pmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a - \dfrac{1}{2}(b+c) & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-c) \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-b) & a - \dfrac{1}{2}(b+c) \end{pmatrix}$. ▼

EXERCICE 2

1. a. Notons que le simple fait que f soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ ne donne pas l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ pour tout (x,t) dans $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$ car le domaine de définition de f n'est pas $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Il faut donc en faire un peu plus au niveau du a) pour pouvoir traiter le b) dans de bonnes conditions...

Posons $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x,t) = 1 + x\,t$. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynôme. En particulier φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Posons $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x\,t > 0\}$. Observons que $\Omega = \varphi^{-1}(]0,+\infty[)$.

Ω est donc l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Ω est donc un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (programme de première année...)

Montrons alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

$(x,t) \to -t^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, car c'est une fonction polynôme, et $u \to e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$; par composition $(x,t) \to e^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, $\forall (x,t) \in \Omega,\ \varphi(x,t) \in \mathbb{R}^{+*}$ et $u \to \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; par composition $(x,t) \to \sqrt{1 + x\,t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Alors par produit f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \boxed{\text{l'ouvert}}\ \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x\,t > 0\}.}$$

▲ *Remarque* *Ce résultat assure l'existence de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *et de* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ *lorsque* (x,t) *est dans* Ω. ▼

Notons que $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 1 + x\,t \geqslant 1 > 0$ donc $[0,+\infty[\times[0,+\infty[\subset \Omega$. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[\times[0,+\infty[.}$$

b. $\forall (x,t) \in \Omega,\ f(x,t) = e^{-t^2}\sqrt{1 + x\,t}$ donc $\forall (x,t) \in \Omega,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t^2}\dfrac{t}{2\sqrt{1+x\,t}} = \dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}(1 + x\,t)^{-\frac{1}{2}}$.

Alors $\forall (x,t) \in \Omega,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)t\,(1 + x\,t)^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}\dfrac{1}{(1 + x\,t)^{\frac{3}{2}}}\cdot$ En particulier :

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{2}\,e^{-t^2}\frac{1}{\sqrt{(1 + x\,t)}}\cdot}$$

$$\boxed{\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{t^2}{4}\,e^{-t^2}\,\frac{1}{(1+x\,t)^{\frac{3}{2}}}.}$$

c. $\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ 1+x\,t\geqslant 1$ donc $\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \sqrt{1+x\,t}\geqslant 1$.

Ainsi $\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}}\leqslant 1$ et $0\leqslant \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$.

Alors $\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}}\leqslant \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$.

$$\boxed{\forall (x,t)\in[0,+\infty[\times[0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right|\leqslant \frac{t^2}{4}\,e^{-t^2}.}$$

2. Soit α un réel strictement positif. Posons $\forall t\in]0,+\infty[,\ h_\alpha(t)=t^\alpha\,e^{-t^2}$.

h_α est continue sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to 0} h_\alpha(t)=0$. Ainsi h_α est prolongeable par continuité en 0.

Ceci donne déjà la convergence de $\displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. Montrons la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

$\forall t\in[1,+\infty[, t\leqslant t^2$ donc $\forall t\in[1,+\infty[,\ -t^2\leqslant -t$. Alors $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant e^{-t^2}\leqslant e^{-t}$ et $0\leqslant t^\alpha$.

Ainsi $\forall t\in[1,+\infty[, 0\leqslant h_\alpha(t)\leqslant t^\alpha\,e^{-t}$.

$\alpha+1$ étant strictement positif, $\Gamma(\alpha+1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe. En particulier $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } \alpha \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} t^\alpha\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

▲ *Exercice* *Montrer en fait que cette intégrale converge si et seulement si* $\alpha\in]-1,+\infty[$. ▼

Soit x un réel positif. Posons : $\forall t\in[0,+\infty[,\ u(t)=e^{-t^2}\sqrt{1+xt}$.

• u est continue sur $[0,+\infty[$.

Rusons un peu pour éviter l'équivalent qui oblige à faire deux cas $x=0$ et $x\neq 0$; le premier cas ne passant pas dans le résultat précédent à cause du α strictement positif...

Observons que $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrons alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

• $\forall t\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant u(t)=e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t}\leqslant e^{-t^2}\sqrt{t+x\,t}=\sqrt{1+x}\,t^{1/2}\,e^{-t^2}$;

• $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{1/2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{1/2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après ce qui précède, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sqrt{1+x}\,t^{1/2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci achève de montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons : $\forall t \in [0,+\infty[,\ v(t) = \dfrac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}}$.

- v est continue sur $[0,+\infty[$.
- $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant v(t) = \dfrac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}} \leqslant t\,e^{-t^2}$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le début de la question.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ positif , } \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+xt}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t^2}}{\sqrt{1+x\,t}}\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}}$$

3. a) Soient x et y deux éléments de $[0,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant 1 + x\,t \leqslant 1 + y\,t$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ \sqrt{1+x\,t} \leqslant \sqrt{1+y\,t}$ et $0 \leqslant e^{-t^2}$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t} \leqslant e^{-t^2}\sqrt{1+y\,t}$.

En intégrant il vient $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+x\,t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{1+y\,t}\,\mathrm{d}t$ ou $g(x) \leqslant g(y)$.

$\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2,\ x \leqslant y \Rightarrow g(x) \leqslant g(y)$.

$$\boxed{g \text{ est croissante sur } [0,+\infty[.}$$

b. Fixons t dans $[0,+\infty[$ et posons : $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ell_t(x) = f(x,t)$.

f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω qui contient $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on peut affirmer que ℓ_t est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ell_t'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $\ell_t''(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à ℓ_t permet d'écrire que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ |\ell_t(x) - \ell_t(x_0) - (x-x_0)\,\ell_t'(x_0)| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2} \operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]} |\ell_t''(u)|.$$

Ainsi $\displaystyle\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^2}{2} \operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right|$.

La majoration de **1. c.** donne : $\forall u \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right[\leqslant \dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$.

Ainsi $\displaystyle\forall x \in [0,+\infty[,\ \operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(x_0,x),\mathrm{Max}(x_0,x)]} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}\,e^{-t^2}$. Par conséquent :

$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{2}\,\dfrac{t^2}{4}\,e^{-t^2} = \dfrac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2.$

$$\boxed{\text{Si } x_0 \in [0,+\infty[,\ \forall (x,t) \in [0,+\infty[^2,\ \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2.}$$

c. Soit x_0 un élément de $[0,+\infty[$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \leqslant \dfrac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2\,\mathrm{d}t$ converge d'après la question 2.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t$. De plus :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{8}\,e^{-t^2}\,|x-x_0|^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t$ est absolument convergente (donc convergente) et l'on peut écrire :

$\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right| \mathrm{d}t.$

Finalement :

$\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \left(f(x,t)-f(x_0,t)-(x-x_0)\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right) \mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Alors $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} f(x_0,t)\,\mathrm{d}t - (x-x_0)\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $\displaystyle\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\forall x_0 \in [0,+\infty[, \forall x \in [0,+\infty[,\ \left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

d. Soit x_0 un élément de $[0,+\infty[$. Soit x un élément de $[0,+\infty[$ distinct de x_0.

$\displaystyle\left|g(x)-g(x_0)-(x-x_0)\int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|^2}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. En divisant par $|x-x_0|$ il vient :

$\displaystyle 0 \leqslant \left|\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Or $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \left(\dfrac{|x-x_0|}{8}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = 0.$

Alors, par encadrement, on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

Ainsi g est dérivable en x_0 et $\displaystyle g'(x_0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\text{ et } \forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.}$$

$\forall (x,t) \in [0,+\infty[^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{2}\,e^{-t^2}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+x\,t}} \geqslant 0$, donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On retrouve ainsi la croissance de } g \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

PROBLÈME

Partie I : Etude des longueurs des séries.

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\{L_1 = n\}$ se réalise si et seulement si les n premiers lancers donnent Pile et le $(n+1)^{\text{ème}}$ Face ou les n premiers lancers donnent Face et le $(n+1)^{\text{ème}}$ Pile. Ainsi :

$$\boxed{\{L_1 = n\} = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}).}$$

Par incompatibilité $P(L_1 = n) = P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})$.

Par indépendance : $P(L_1 = n) = P(P_1)\,P(P_2)\dots P(P_n)\,P(F_{n+1}) + P(F_1)\,P(F_2)\dots P(F_n)\,P(P_{n+1})$.

Ainsi $P(L_1 = n) = p^n\,q + q^n\,p$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(L_1 = n) = p^n\,q + q^n\,p.}$$

$|p| < 1$ et $|q| < 1$ donc les séries de termes généraux p^n et q^n sont convergentes. Alors la série de terme général $P(L_1 = n)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes (ce qui est une évidence puisque les événements de la suite $(\{L_1 = n\})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles) et surtout :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = q \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$. Un changement d'indice simple donne :

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = q \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i+1} + p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+1} = qp \sum_{i=0}^{+\infty} p^i + pq \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = qp\,\frac{1}{1-p} + pq\,\frac{1}{1-q} = qp\,\frac{1}{q} + pq\,\frac{1}{p}\cdot$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = p + q = 1.$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(L_1 = n) = 1.}$$

▲ *Exercice Montrer que L_1 possède une espérance qui vaut $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}\cdot$* ▲

2. a. Soit n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

$\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}$ se réalise si et seulement si les n premiers lancers donnent Pile, les k suivants Face et le $(n+k+1)^{\text{ème}}$ Pile ou les n premiers lancers donnent Face, les k suivants Pile et le $(n+k+1)^{\text{ème}}$ Face. Ainsi :

$\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\} = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1})$.

Si k et n sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$:

$\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\} = (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1})$.

ou $\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\} = \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} F_i\right) \cap P_{n+k+1}\right) \cup \left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} P_i\right) \cap F_{n+k+1}\right)$.

Soient n et k deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Par incompatibilité on obtient :

$$P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} F_i\right) \cap P_{n+k+1}\right) + P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{n+k} P_i\right) \cap F_{n+k+1}\right)$$

Par indépendance $P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\})$ vaut encore :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} P(P_i)\right)\left(\prod_{i=n+1}^{n+k} P(F_i)\right) P(P_{n+k+1}) + \left(\prod_{i=1}^{n} P(F_i)\right)\left(\prod_{i=n+1}^{n+k} P(P_i)\right) P(F_{n+k+1}).$$

Ainsi $P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}) = p^n\, q^k\, p + q^n\, p^k\, q = p^{n+1}\, q^k + q^{n+1}\, p^k$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\}) = p^{n+1}\, q^k + q^{n+1}\, p^k\ .}$$

b. $\big(\{L_1 = n\}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(L_2 = k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{L_1 = n\} \cap \{L_2 = k\})$. Ainsi $P(L_2 = k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(p^{n+1}\, q^k + q^{n+1}\, p^k\big)$.

Alors $P(L_2 = k) = q^k \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} + p^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n+1}$ car les séries de termes généraux p^{n+1} et q^{n+1} convergent puisque $|p| < 1$ et $|q| < 1$.

Un petit changent d'indice donne alors : $P(L_2 = k) = q^k \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p^{i+2} + p^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+2}$.

Donc $P(L_2 = k) = q^k\, p^2 \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} p^i + p^k\, q^2 \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = q^k\, p^2\, \frac{1}{1-p} + p^k\, q^2\, \frac{1}{1-q} = q^k\, p^2\, \frac{1}{q} + p^k\, q^2\, \frac{1}{p}$.

Finalement $P(L_2 = k) = p^2\, q^{k-1} + q^2\, p^{k-1}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(L_2 = k) = p^2\, q^{k-1} + q^2\, p^{k-1}.}$$

▲ *Remarque* *Les séries de termes généraux q^{k-1} et p^{k-1} convergent donc :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} q^j + q^2 \sum_{j=0}^{+\infty} p^j = p^2\, \frac{1}{1-q} + q^2\, \frac{1}{1-p} = p^2\, \frac{1}{p} + q^2\, \frac{1}{q}.$$

$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = k) = p + q = 1.$ ▼

c. Montrer que L_2 possède une espérance consiste à montrer que la série de terme général $k\,P(L_2 = k)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs il suffit d'établir sa convergence pour pouvoir dire qu'elle est absolument convergente.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,P(L_2 = k) = p^2\,k\,q^{k-1} + q^2\,k\,p^{k-1}$. Comme $|q| < 1$ et $|p| < 1$ le cours indique que les séries de termes généraux $k\,q^{k-1}$ et $k\,p^{k-1}$ convergent.

La série de terme général $k\,P(L_2 = k)$ est convergente comme combinaison linéaire de deux séries convergentes. D'après ce qui a été dit plus haut, ceci achève de montrer que L_2 possède une espérance.

De plus $E(L_2) = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k\,q^{k-1} + q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k\,p^{k-1} = p^2\,\frac{1}{(1-q)^2} + q^2\,\frac{1}{(1-p)^2} = p^2\,\frac{1}{p^2} + q^2\,\frac{1}{q^2} = 2.$

$$\boxed{L_2 \text{ possède une espérance qui vaut } 2.}$$

▲ *Exercices* *Etudier les variables aléatoires L_{2r-1} et L_{2r} pour tout r dans $\mathbb{N}^*$ (ou dans $[\![2, +\infty[\![$) !* ▲

Partie II : Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

1. • N_1 est la variable certaine égale à 1.

$$\boxed{N_1(\Omega) = \{1\},\ P(N_1 = 1) = 1 \text{ et } E(N_1) = 1.}$$

• $N_2(\Omega) = [\![1, 2]\!]$. $\{N_2 = 1\} = (P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)$. Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$P(N_2 = 1) = P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) = P(P_1)\,P(P_2) + P(F_1)\,P(F_2) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$

Alors $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot$

$E(N_2) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot$

$$\boxed{N_2(\Omega) = [\![1, 2]\!],\ P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2} \text{ et } E(N_2) = \frac{3}{2}\cdot}$$

▲ *Remarque* $E(N_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ *et* $V(N_2) = E(N_2^2) - \big(E(N_2)\big)^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot$ ▼

• $N_3(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. $\{N_3 = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$.

Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$P(N_3 = 1) = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P(P_1)\,P(P_2)\,P(P_3) + P(F_1)\,P(F_2)\,P(F_3).$

$P(N_3 = 1) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\cdot$

$\{N_3 = 3\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$. Par incompatibilité et indépendance on obtient :

$P(N_3=3) = P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) = P(P_1)\,P(F_2)\,P(P_3) + P(F_1)\,P(P_2)\,P(F_3)$.

$P(N_3=3) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}\cdot$

Alors $P(N_3=2) = 1 - P(N_3=1) - P(N_3=3) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot$

▲ *Remarque* *On retrouve sans difficulté ce dernier résultat en remarquant que :*

$\{N_3 = 2\} = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3)$. ▼

$E(N_3) = 1 \times \dfrac{1}{4} + 2 \times \dfrac{1}{2} + 3 \times \dfrac{1}{4} = 2$.

$$\boxed{N_3(\Omega) = [\![1,3]\!],\ P(N_3=1) = \frac{1}{4},\ P(N_3=2) = \frac{1}{2},\ P(N_3=3) = \frac{1}{4} \text{ et } E(N_3) = 2.}$$

▲ *Remarque* $E(N_3^2) = 1^2 \times \dfrac{1}{4} + 2^2 \times \dfrac{1}{2} + 3^2 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{2}\cdot$ $V(N_3) = E(N_3^2) - \big(E(N_3)\big)^2 = \dfrac{9}{2} - 2^2 = \dfrac{1}{2}\cdot$ ▼

▲ *Exercice* *Reprendre cette étude dans le cas où la pièce donne Pile avec la probabilité p et Face avec la probabilité q.* ▼

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Il semble clair que $N_n(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$.

Si k est un élément pair de $[\![1,n]\!]$ et si l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k \cap F_{k+1} \cap \cdots \cap F_n$ se réalise alors l'événement $\{N_n = k\}$ se réalise.

Si k est un élément impair de $[\![1,n]\!]$ et si l'événement $P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{k-2} \cap F_{k-1} \cap P_k \cap P_{k+1} \cap \cdots \cap P_n$ se réalise alors l'événement $\{N_n = k\}$ se réalise. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ N_n(\Omega) = [\![1,n]\!].}$$

$\{N_n = 1\} = (P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n)$. Par indépendance et incompatibilité on obtient :

$P(N_n=1) = P(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) + P(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) = P(P_1)\,P(P_2) \cdots P(P_n) + P(F_1)\,P(F_2) \cdots P(F_n)$.

Ainsi $P(N_n = 1) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot$

Supposons n pair.

$\{N_n = n\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$.

Ici encore par indépendance et incompatibilité on obtient : $P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot$

Supposons n impair.

$\{N_n = n\} = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4 \cap \cdots \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap \cdots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n)$.

Toujours par indépendance et incompatibilité on obtient : $P(N_n = n) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot$

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est un élément de } \mathbb{N}^*,\ P(N_n = 1) = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ et } P(N_n = n) = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot}$$

▲ *Exercice* *Montrer que $T_n = N_n - 1$ suit la loi binômiale de paramètres $n-1$ et $\dfrac{1}{2}$ (on pourra remarquer que N_n est 1 plus le nombre de fois où l'on obtient un résultat différent du précédent).*

En déduire que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(N_n = k) = \dbinom{n-1}{k-1} \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $E(N_n) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(N_n) = \dfrac{n-1}{4}\cdot$

Le problème est ainsi terminé... ▼

3. Le programme ne pose aucun problème dès lors que l'on remarque que le nombre de séries augmente d'une unité à chaque fois que l'on obtient un résultat différent du précédent.

```
program simulation;

const nmax=100;
Type suite=array[1..nmax] of integer;

Var X,N :suite;i,m:integer;

Begin

write('Donnez la valeur de m. m='); readln(m);
randomize;
X[1]:=random(2);N[1]:=1;
For i:=2 to m do
   begin
   X[i]:=random(2);
   if X[i]=X[i-1] then N[i]:=N[i-1]
                  else N[i]:=N[i-1]+1;
   end;
end.
```

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit s un élément de $[0, 1]$.

Le théorème de transfert montre que $E(s^{N_n}) = \sum\limits_{k=1}^{n} s^k\, P(N_n = k)$. Ainsi $E(s^{N_n}) = G_n(s)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in [0, 1],\ E(s^{N_n}) = G_n(s).}$$

b. G_n est dérivable sur $[0, 1]$, comme fonction polynôme et $\forall s \in [0, 1]$, $G_n'(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, k\, s^{k-1}$.

Alors $G_n'(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, k\, 1^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\, P(N_n = k) = E(N_n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n'(1) = E(N_n).}$$

c. Soient n un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et k un élément de $[\![1, n]\!]$.

(P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(\{N_n = k\} \cap P_n) = P(\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}) + P(\{N_n = k\} \cap P_n \cap F_{n-1})$. Observons alors que :

$\{N_n = k\} \cap P_n \cap P_{n-1} = \{N_{n-1} = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}$ et $\{N_n = k\} \cap P_n \cap F_{n-1} = \{N_{n-1} = k-1\} \cap P_n \cap F_{n-1}$.

Ainsi : $P(\{N_n = k\} \cap P_n) = P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}) + P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_n \cap F_{n-1})$.

Par indépendance des lancers on a :

$P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_n \cap P_{n-1}) = P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1})\, P(P_n) = \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1})$.

De même : $P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_n \cap F_{n-1}) = P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1})\, P(P_n) = \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1})$.

Alors : $P(\{N_n = k\} \cap P_n) = \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1})$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(\{N_n = k\} \cap P_n) = \frac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}).}$$

De même :

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(\{N_n = k\} \cap F_n) = \frac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_{n-1}).}$$

Soient n un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et k un élément de $[\![1, n]\!]$.

(F_n, P_n) est un système complet dévénements. La formule des probabilités totales donne alors :

$P(N_n = k) = P(\{N_n = k\} \cap P_n) + P(\{N_n = k\} \cap F_n)$. Alors :

$P(N_n = k) = \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap F_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_{n-1})$.

Or (P_{n-1}, F_{n-1}) est un système complet d'événements donc :

$\dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap P_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k\} \cap F_{n-1}) = \dfrac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k)$.

De même : $\dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap F_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, P(\{N_{n-1} = k-1\} \cap P_{n-1}) = \dfrac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k-1)$.

Par conséquent : $P(N_n = k) = \dfrac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k-1)$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(N_n = k) = \frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k-1).}$$

d. Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et soit s un élément de $[0, 1]$.

$G_n(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\, P(N_{n-1} = k-1) \right) s^k$.

$$G_n(s) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k)\, s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_{n-1} = k-1)\, s^k.$$

$$G_n(s) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\boxed{\text{n-1}}} P(N_{n-1} = k)\, s^k + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} P(N_{n-1} = i)\, s^{i+1}.$$

$$G_n(s) = \frac{1}{2}\, G_{n-1}(s) + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=\boxed{1}}^{n-1} P(N_{n-1} = i)\, s^i\Big)\, s = \frac{1}{2}\, G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}\, G_{n-1}(s) = \frac{1+s}{2}\, G_{n-1}(s).$$

$$\boxed{\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ \forall s \in [0,1],\ G_n(s) = \frac{1+s}{2}\, G_{n-1}(s).}$$

$$\forall s \in [0,1],\ G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1 = k)\, s^k = P(N_1 = 1)\, s = s.$$

$$\boxed{\forall s \in [0,1],\ G_1(s) = s.}$$

Soit s un élément de $[0,1]$. $\big(G_n(s)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1+s}{2}$ et de premier terme s.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall s \in [0,1],\ G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.}$$

▲ *Remarque* *Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.*

$$\forall s \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k = G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s = s\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}\left(\frac{s}{2}\right)^{k}.$$

$$\forall s \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} s^{k+1}.$$

Un petit changement d'indice dans la seconde somme fournit :

$$\forall s \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)\, s^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} s^{k}.$$

Alors $\forall s \in [0,1],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) s^k = 0.$

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(P(N_n = k) - \binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) X^k$ *admet donc une infinité de racines ; c'est donc le polynôme nul.*

Ainsi $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(N_n = k) - \dbinom{n-1}{k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ *ou* $\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(N_n = k) = \dbinom{n-1}{k-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}.$

$N_n - 1$ *suit donc la loi binômiale de paramètres* $n-1$ *et* $\dfrac{1}{2}\cdot$

On retrouve ainsi le résultat proposé dans l'exercice de la question 2. ▼

e. Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$\forall s \in [0,1],\ G_n(s) = \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1} s$ donc $\forall s \in [0,1],\ G'_n(s) = (n-1)\,\dfrac{1}{2}\,\left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}$.

Alors $E(N_n) = G'_n(1) = (n-1)\,\dfrac{1}{2}\,\left(\dfrac{1+1}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(\dfrac{1+1}{2}\right)^{n-1} = (n-1)\,\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{n+1}{2}\cdot$

Ainsi $E(N_n) = \dfrac{n+1}{2}\cdot$ Notons que ceci vaut encore pour $n=1$ car $E(N_1)=1$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(N_n) = \dfrac{n+1}{2}\cdot}$$

▲ *Exercice Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser G''_n pour montrer que $V(N_n) = \dfrac{n-1}{4}\cdot$* ▼

Partie III : Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Piles consécutifs.

1. $\varphi : x \to e^{-x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi''(x) = e^{-x} \geqslant 0$. Ainsi φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de φ est au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} \geqslant (-1) \times x + 1 = 1 - x$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - x \geqslant e^{-x}.}$$

2. a. La série de terme général $P(A_i)$ est à termes positifs et divergente donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=k}^{n} P(A_i) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i=1}^{k-1} P(A_i)\right) = +\infty$ (à un petit abus près au niveau de l'avant dernière égalité).

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.}$$

b. Soit n un élément de $[\![k,+\infty[\![$. $P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P\left(\overline{\bigcup\limits_{i=k}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap\limits_{i=k}^{n} \overline{A_i}\right)$.

Comme $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants, $(\overline{A_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est encore une suite d'événements indépendants.

Ceci permet d'écrire que : $P(C_n) = 1 - \prod\limits_{i=k}^{n} P(\overline{A_i})$.

$$\boxed{\forall n \in [\![k,+\infty[\![,\ P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}).}$$

Soit n un élément de $[\![k,+\infty[\![$. $\forall i \in [\![k,n]\!],\ 0 \leqslant P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leqslant \exp\left(-P(A_i)\right)$ d'après **1.**

Par produit : $\displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \leqslant \prod_{i=k}^{n} \exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$.

Alors $P(C_n) = 1 - \displaystyle\prod_{i=k}^{n} P(\overline{A_i}) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$.

$$\boxed{\forall n \in [\![k, +\infty[\![,\ P(C_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right).}$$

$\forall n \in [\![k, +\infty[\![,\ 1 \geqslant P(C_n) \geqslant 1 - \exp\left(-\displaystyle\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)$.

Le **a.** nous a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right) = 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P(A_i)\right)\right) = 1$ et par encadrement on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

c. $\forall n \in [\![k, +\infty[\![,\ C_n = \displaystyle\bigcup_{i=k}^{n} A_i \subset \bigcup_{i=k}^{n+1} A_i = C_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in [\![k, +\infty[\![,\ C_n \subset C_{n+1}.\ \text{La suite } (C_n)_{n\geqslant k} \text{ est croissante.}}$$

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = 1.}$$

d. • Soit i un élément de $[\![k, +\infty[\![$. $A_i \subset \displaystyle\bigcup_{j=k}^{i} A_j = C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

Ainsi $\forall i \in [\![k, +\infty[\![,\ A_i \subset \displaystyle\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Donc $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

• Soit ω un élément de $\displaystyle\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Alors il existe r dans $[\![k, +\infty[\![$ tel que $\omega \in C_r$.

Or $C_r = \displaystyle\bigcup_{i=k}^{r} A_i$; ainsi il existe un élément i_0 de $[\![k, r]\!]$, donc de $[\![k, +\infty[\![$, tel que $\omega \in A_{i_0}$.

Par conséquent $\omega \in \displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Ceci achève de montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Finalement : $\displaystyle\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.}$$

Il résulte alors du c) que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.}$$

▲ *Remarque* *Notons que* $\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite décroissante d'événements.*

Alors $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)\right) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$. *Donc* $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)\right) = 1$. *Ceci ne signifie-t-il pas qu'il est presque sûr qu'un nombre infini d'événements de la suite* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *se réalisent ?* ▼

▲ *Exercice 1* *Justifier le dernier résultat de la remarque.* ▼

▲ *Exercice 2* *En supposant simplement que la série de terme général* $P(A_n)$ *converge (sans hypothèse d'indépendance) montrer qu'il est presque sûr que seul un nombre fini d'événements de la suite* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ *se réalisent.* ▼

3. L'indépendance des lancers donne l'indépendance des événements de la suite $(P_{2n} \cap P_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(A_n) = P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) = P(P_{2n})\,P(P_{2n+1}) = p^2$. Donc la série de terme général $P(A_n)$ diverge car la suite de terme général $P(A_n)$ ne converge pas vers zéro..

Alors, d'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

Cela signifie que la probabilité d'obtenir deux Piles consécutifs à partir du $(2k)^{\text{ème}}$ lancer vaut 1 pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$. Alors nécessairement :

$$\boxed{\text{la probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.}}$$