

---

# ECRICOME 2008

---

## EXERCICE 1

---

**Désolé mais je ne mettrai pas de flèches sur les vecteurs même sous la torture.**

1. Soit  $v$  un élément de  $\mathbb{R}^3$ . Il existe un unique élément  $(v_1, v_2)$  de  $\mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp$  tel que  $v = v_1 + v_2$ .

Par définition  $p(v) = v_1$  et  $q(v) = v_2$  donc  $(p + q)(v) = p(v) + q(v) = v_1 + v_2 = v$ .

$$p + q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}.$$

2.  $(u)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{D}$ . Le cours donne alors :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, p(v) = \langle v, u \rangle u.$$

Notons que  $\langle i, u \rangle = a$ ,  $\langle j, u \rangle = b$  et  $\langle k, u \rangle = c$ . Ainsi :

$$p(i) = au = a(ai + bj + ck), p(j) = bu = b(ai + bj + ck) \text{ et } p(k) = cu = c(ai + bj + ck).$$

$$\text{Alors : } P = M_{(i,j,k)}(p) = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

$$q = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} - p \text{ donc } Q = I_3 - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1 - b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2 + c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ba & -ca \\ -ab & 1 - b^2 & -cb \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ba & -ca \\ -ab & a^2 + c^2 & -cb \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ a. } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 - b^2 & ba & ca \\ ab & -c^2 - a^2 & cb \\ ac & bc & -b^2 - a^2 \end{pmatrix} = -Q.$$

$$M^2 = -Q.$$

$$\text{b. } M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

$u$  est un vecteur non nul de  $\text{Ker } f$  donc  $\dim \text{Ker } f \geq 1$ .

Le théorème du rang donne alors  $\text{rg } f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } f \leq 3 - 1 = 2$ .

$$\text{rg}(f) \leq 2.$$

$f \circ f = -q$  car  $M^2 = -Q$ . Ainsi  $\text{Im } f^2 = \text{Im}(-q) = \text{Im } q = \mathcal{D}^\perp$ . Alors  $\mathcal{D}^\perp = \text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ .

Ceci donne en particulier :  $2 = \dim \mathcal{D}^\perp = \dim \text{Im } f^2 \leq \dim \text{Im } f = \text{rg } f$ . Alors  $\text{rg } f \geq 2$ .

Finalement  $\dim \text{Im } f = \text{rg } f = 2$ .

Alors  $\mathcal{D}^\perp \subset \text{Im } f$  et  $\dim \mathcal{D}^\perp = \dim \text{Im } f = 2$  donc  $\text{Im } f = \mathcal{D}^\perp$ .

Dans ces conditions  $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg } f = 3 - 2 = 1$ . De plus  $u$  est un vecteur non nul de  $\text{Ker } f$ .

Alors  $\text{Ker } f = \text{Vect}(u) = \mathcal{D}$ .

$$\boxed{\text{Im } f = \mathcal{D}^\perp \text{ et } \text{Ker } f = \mathcal{D}.}$$

c.  $\forall v \in \mathbb{R}^3$ ,  $p(v) \in \mathcal{D}$  et  $\mathcal{D} = \text{Ker } f$  donc  $\forall v \in \mathbb{R}^3$ ,  $f(p(v)) = 0_{\mathbb{R}^3}$ .

$$\boxed{f \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

$f^2 = -q = p - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$  donc  $f^3 = f \circ p - f = -f$ . Ainsi  $f + f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ .

$$\boxed{X + X^3 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

d. L'ensemble des valeurs propres de  $f$  est contenu dans l'ensemble des zéros de  $X + X^3$  dans  $\mathbb{R}$  donc 0 est la seule valeur propre possible de  $f$ .

Or  $\text{Ker } f$  est de dimension 1 donc 0 est valeur propre de  $f$  et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Ainsi  $f$  n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } f \text{ et } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4. a Soient  $\theta$  et  $\theta'$  deux réels.  $g_\theta \circ g_{\theta'} = (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin \theta f + (1 - \cos \theta) f^2) \circ (\text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin \theta' f + (1 - \cos \theta') f^2)$ .

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta' + \sin \theta) f + ((1 - \cos \theta') + \sin \theta \sin \theta' + (1 - \cos \theta)) f^2 + (\sin \theta (1 - \cos \theta') \sin \theta + (1 - \cos \theta) \sin \theta') f^3 + (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta') f^4.$$

Notons que  $f^3 = -f$  et  $f^4 = -f^2$ . Il vient alors :

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta' + \sin \theta - \sin \theta (1 - \cos \theta') - (1 - \cos \theta) \sin \theta') f + (1 - \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' + 1 - \cos \theta - (1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta')) f^2 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + (\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta') f + (1 - (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta')) f^2.$$

$$g_\theta \circ g_{\theta'} = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} + \sin(\theta + \theta') f + (1 - \cos(\theta + \theta')) f^2 = g_{\theta + \theta'}.$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall \theta' \in \mathbb{R}, g_\theta \circ g_{\theta'} = g_{\theta + \theta'}.$$

b. Notons que  $g_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . Alors  $g_\theta \circ g_{(-\theta)} = g_{\theta + (-\theta)} = g_0 = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . De même  $g_{(-\theta)} \circ g_\theta = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . Ainsi :

$$\boxed{g_\theta \text{ est inversible et } g_\theta^{-1} = g_{(-\theta)}.$$

## EXERCICE 2

1. a. Soit  $x$  un réel positif.  $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n^2}$ .

De plus la série de terme général  $\frac{x}{n^2}$  converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général  $f_n(x)$  converge.

Pour tout réel positif  $x$ , la série de terme général  $f_n(x)$  converge.

$$\text{b. } F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 0. \quad F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^r \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{r+1} \right) = 1.$$

$$F(0) = 0 \text{ et } F(1) = 1.$$

2. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$ .

Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^{+*}$ .  $f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ .

De plus la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$  converge et est à termes positifs.

Alors les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent que la série de terme général  $f'_n(x)$  converge.

Pour tout réel positif  $x$ , la série de terme général  $f'_n(x)$  converge.

3. a.  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}$  et  $\varphi''(t) = \frac{2}{t^3}$ .

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . Soient  $x$  et  $x_0$  deux éléments de  $[n, +\infty[$ .

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à  $\varphi$  à l'ordre 1 donne :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0) \varphi'(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2!} \underset{t \in [x_0, x] \text{ ou } [x, x_0]}{\text{Max}} |\varphi''(t)|.$$

Notons que  $\forall t \in [n, +\infty[$ ,  $|\varphi''(t)| = \frac{2}{t^3} \leq \frac{2}{n^3}$ . Alors  $\underset{t \in [x_0, x] \text{ ou } [x, x_0]}{\text{Max}} |\varphi''(t)| \leq \frac{2}{n^3}$ .

Par conséquent :  $|\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0) \varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, x_0) \in ([n, +\infty[)^2, |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x - x_0) \varphi'(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{n^3}.$$

b.  $x$  et  $h$  sont deux réels tels que  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $h \neq 0$  et  $x+h \in \mathbb{R}^+$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} - h \frac{1}{(n+x)^2} \right|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| = |-\varphi(n+x+h) + \varphi(n+x) + h \varphi'(n+x)| = |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - h \varphi'(n+x)|.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| = |\varphi(n+x+h) - \varphi(n+x) - (n+x+h - (n+x)) \varphi'(n+x)|.$$

Or  $n+x+h$  et  $n+x$  sont deux éléments de  $[n, +\infty[$ . b. donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| \leq \frac{(n+x+h - n - x)^2}{n^3} = \frac{h^2}{n^3}.$$

La convergence de la série de terme général  $\frac{h^2}{n^3}$  et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général  $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)|$ .

Si  $x$  et  $h$  sont deux réels tels que  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $h \neq 0$  et  $x+h \in \mathbb{R}^+$  alors la série de terme général  $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)|$  est convergente.

c.  $x$  et  $h$  sont deux réels tels que  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $h \neq 0$  et  $x+h \in \mathbb{R}^+$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}$ . De plus la série de terme général  $f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)$  est absolument convergente et la série de terme général  $\frac{h^2}{n^3}$  converge. Alors :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x+h) - f_n(x) - h f'_n(x)| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Les séries de termes généraux  $f_n(x+h)$ ,  $f_n(x)$  et  $f'_n(x)$  étant convergentes on a encore :

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x+h) - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) - h \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) \right| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ ou } |F(x+h) - F(x) - h G(x)| \leq h^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

En divisant par  $|h|$  on obtient :  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq |h| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .

Si  $x$  et  $h$  sont deux réels tels que  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $h \neq 0$  et  $x+h \in \mathbb{R}^+$  alors :  $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|$  où  $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ .

**d.** Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^+$ .  $\forall h \in ]-x, 0[ \cup ]0, +\infty[$ ,  $0 \leq \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x) \right| \leq K|h|$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} (K|h|) = 0$ .

Alors, par encadrement on obtient :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = G(x)$ . Ainsi  $F$  est dérivable en  $x$  et  $F'(x) = G(x)$ .

$F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et  $F' = G$ .

**4. a.** Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^+$  et soit  $k$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ . Posons :  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$ .

$\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi_x(t) = \frac{x}{t(t+x)}$ .  $\varphi_x$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi'_x(t) = -\frac{x(2t+x)}{(t(t+x))^2}$ .

$\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi'_x(t) \leq 0$ .  $\varphi_x$  est donc décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Ainsi  $\forall t \in [k, k+1]$ ,  $f_{k+1}(x) = \varphi_x(k+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(k) = f_k(x)$ .

En intégrant il vient :  $f_{k+1}(x) = \int_k^{k+1} f_{k+1}(x) dt \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \int_k^{k+1} f_k(x) dt = f_k(x)$ .

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq f_k(x)$ .

**b.** Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^+$ . Soit  $n$  un élément de  $\llbracket 2, +\infty \llbracket$ .

a. donne :  $\int_1^{n+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \sum_{k=1}^n \left( \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x)$ .

a. donne encore :  $\int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) - f_1(x)$ .

Ainsi :  $\int_1^{n+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq f_1(x) + \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$ . Or  $f_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$ . Donc

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ ,  $\int_1^{n+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt$ .

c. Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}^+$ .

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \left[ \ln |t| - \ln |t+x| \right]_1^n = \ln \left( \frac{n}{n+x} \right) - \ln \left( \frac{1}{1+x} \right).$$

Notons également que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{n}{n+x} \right) = 0$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_1^n \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) = -\ln \left( \frac{1}{1+x} \right) = \ln(1+x)$ .

On a encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_1^{n+1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt \right) = \ln(1+x)$ .

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'encadrement de b. il vient :  $\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$ .

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x).}$$

d.  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $\ln x > 0$  donc  $\forall x \in ]1, +\infty[$ ,  $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \leq \frac{F(x)}{\ln x} \leq \frac{x}{x+1} \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{\ln x} \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = 1$ .

De plus :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x+1} \frac{1}{\ln x} \right) = 1 \times 0 = 0$ . On obtient alors par encadrement  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\ln x} = 1$ . Finalement :

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.}$$

## PROBLÈME

### 3. 1. Méthode de Monte-carlo.

1. a.  $\boxed{\text{La fonction } f_U \text{ définie par } \forall x \in \mathbb{R}, f_U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ est une densité de } U.}$

b. Utilisons le théorème de transfert.

- $U$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $I = [0, 1]$ ... d'extrémités 0 et 1 ;
- $g$  est définie et continue sur  $I$ .

Alors  $g(U)$  possède une espérance si et seulement si  $\int_0^1 g(t) f_U(t) dt$  est absolument convergente.

En cas d'existence :  $E(g(U)) = \int_0^1 g(t) f_U(t) dt$  donc  $E(g(U)) = \int_0^1 g(t) dt = J$ .

$\forall t \in [0, 1]$ ,  $|g(t) f_U(t)| = |g(t)|$  et  $|g|$  est continue sur  $[0, 1]$ . Alors  $\int_0^1 |g(t) f_U(t)| dt$  converge.

Ainsi  $E(g(U))$  existe et vaut  $\int_0^1 g(t) f_U(t) dt$  c'est à dire  $J$ .

$\boxed{\text{La variable aléatoire } g(U) \text{ admet une espérance égale à } J.}$

2. Dans la suite **nous supposons** que  $\sigma$  est positif donc strictement positif...

Tous les variables aléatoires de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ayant même loi, **nous admettrons** qu'il en est de même pour les variables aléatoires de la suite  $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$

a. Utilisons la loi faible des grands nombres.

- $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes donc  $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes ;
- Toutes les variables aléatoires de la suite  $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ont même loi, possèdent une espérance égale à  $J$  et une même variance.

Alors la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{g(U_1) + g(U_2) + \dots + g(U_n)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $J$ .

La suite de variables aléatoires  $\left( \frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $J$ .

b. i. Utilisons le théorème de la limite centrée.

- $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires de la suite  $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ont même loi, possèdent une espérance égale à  $J$  et une variance non nulle égale à  $\sigma^2$ .

Dans ces conditions, la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Il en est alors clairement de même pour la suite  $\left( \frac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Notons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n g(U_i)\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(g(U_i)) = \frac{1}{n} n J = J$ .

Les variables aléatoires de la suite  $(g(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  étant indépendantes on a encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n g(U_i)\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(g(U_i)) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}} = \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ . Finalement :

La suite de variables aléatoires  $\left( \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

ii. Supposons  $n$  assez grand. Alors  $\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  suit la loi normale centrée réduite... Donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \varepsilon\right) = \Phi(\varepsilon) - \Phi(-\varepsilon) = \Phi(\varepsilon) - (1 - \Phi(\varepsilon)) = 2\Phi(\varepsilon) - 1.$$

En particulier :  $P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = 2\Phi(1,96) - 1 = 2 \times 0,975 - 1 = 0,95$ . Notons alors que :

$$P\left(\left|\frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = P\left(-1,96 \leq \frac{\frac{S_n}{n} - J}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1,96\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi  $P\left(\frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$ .

$\left[ \frac{S_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$  est un intervalle de confiance pour  $J$  au niveau de confiance 95 %.

3. a sin définit une bijection de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[0, 1]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et (strictement) croissante.

Ceci justifie largement le changement de variable  $t = \sin u$  dans l'intégrale  $\int_0^1 4 \sqrt{1-t^2} dt$ .

$$\int_0^1 4 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 u du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) dt = 2 \left[ u + \frac{\sin(2u)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\int_0^1 4 \sqrt{1-t^2} dt = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\int_0^1 4 \sqrt{1-t^2} dt = \pi.$$

b. i. Rien à signaler.

```
1 fonction G(t:real):real;
2 begin
3 G:=4*sqrt(1-t*t);
4 end;
```

ii. Notons qu'ici la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{S_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $J = \pi$ .

Notons aussi que l'on nous demande simplement de simuler la variable aléatoire  $\frac{S_n}{n}$ .

```
1 begin
2 randomize;
3 write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);
4 J:=0;
5 for i:= 1 to n do J:=J+G(random);
6 J:=J/n;
7 writeln('Une valeur approchée de pi est : ',J);
8 end.
```

### 3. 2. Réduction de la variance par variables antithétiques.

1. Posons  $T = 1 - U$ .  $T$  est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans  $[0, 1]$ .

Notons  $F_T$  sa fonction de répartition et  $F_U$  celle de  $U$ .

$\forall x \in ]-\infty, 0]$ ,  $F_T(x) = 0$  et  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $F_T(x) = 1$ . Soit  $x$  un élément de  $[0, 1[$ . Notons que  $1 - x \in [0, 1]$ . Ainsi :

$$F_T(x) = P(1 - U \leq x) = P(1 - x \leq U) = 1 - P(U < 1 - x) = 1 - P(U \leq 1 - x) = 1 - F_U(1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$$

Finalement  $\forall x \in ]-\infty, 0]$ ,  $F_T(x) = 0$ ,  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $F_T(x) = x$  et  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $F_T(x) = 1$ .

Donc  $T$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

$1 - U$  suit la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .

Dans ces conditions  $U$  et  $1 - U$  ont même loi. Il en est alors de même pour  $g(U)$  et  $g(1 - U)$ .

Par conséquent  $g(1 - U)$  possède une espérance qui vaut  $J$ .

Alors  $Y = \frac{1}{2} [g(U) + g(1 - U)]$  possède une espérance qui vaut  $\frac{1}{2} [E[g(1 - U)] + E[g(U)]]$  donc  $J$ .

$$\boxed{E(Y) = J.}$$

**2. a.** Soit  $u$  et  $w$  deux éléments de  $[0, 1]$ .  $g$  est (strictement) croissante sur  $[0, 1]$  donc  $g(u) - g(w)$  est du signe de  $u - w$  et  $g(1 - u) - g(1 - w)$  est du signe de  $(1 - u) - (1 - w)$  donc du signe de  $-(u - w)$ .

Alors  $g(u) - g(w)$  et  $g(1 - u) - g(1 - w)$  sont de signes opposés. Donc  $(g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0$ .

$$\boxed{\forall (u, w) \in [0, 1]^2, (g(u) - g(w))(g(1 - u) - g(1 - w)) \leq 0.}$$

► *Remarque* Ceci vaut encore si  $g$  est (strictement) décroissante.

**b. Version light**  $U$  et  $W$  prennent leurs valeurs dans  $[0, 1]$ .

Donc d'après ce qui précède  $\forall \omega \in \Omega, (g(U(\omega)) - g(W(\omega)))(g(1 - U(\omega)) - g(1 - W(\omega))) \leq 0$ .

Ceci donne :  $(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W)) \leq 0$ .

La croissance de l'espérance donne alors  $E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))] \leq 0$ .

*Seconde version*  $U$  et  $W$  prennent presque sûrement leurs valeurs dans  $[0, 1]$ .

Notons  $S$  l'événement  $\{U \in [0, 1]\} \cap \{W \in [0, 1]\}$  et  $S'$  l'événement  $\{(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W)) \leq 0\}$ .

D'après ce qui précède  $\forall \omega \in S, (g(U(\omega)) - g(W(\omega)))(g(1 - U(\omega)) - g(1 - W(\omega))) \leq 0$ .

Ainsi  $S \subset S'$  donc  $P(S) \leq P(S')$ .

Par indépendance :  $P(S) = P(\{U \in [0, 1]\} \cap \{W \in [0, 1]\}) = P(U \in [0, 1])P(W \in [0, 1]) = 1 \times 1 = 1$ .

Par conséquent  $1 = P(S) \leq P(S') \leq 1$ , donc  $P(S') = 1$ .

Alors presque sûrement  $(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))$  prend des valeurs négatives ou nulles.

Grace au cours on retrouve ainsi :

$$\boxed{E[(g(U) - g(W))(g(1 - U) - g(1 - W))] \leq 0.}$$

Dans ces conditions, par linéarité de l'espérance et grace à l'espérance (!!) de l'existence de toutes les espérances (... voir plus bas) on a :

$$E(g(U)g(1 - U)) - E(g(U)g(1 - W)) - E(g(W)g(1 - U)) + E(g(W)g(1 - W)) \leq 0.$$

$U$  et  $W$  sont indépendantes donc  $U$  et  $1 - W$  le sont également. Alors  $g(U)$  et  $g(1 - W)$  sont indépendantes.

De plus  $U$  et  $1 - W$  ont même loi donc  $g(U)$  et  $g(1 - W)$  aussi. Alors  $E(g(1 - W))$  existe et vaut  $E(g(U))$ .

Ce qui précède donne alors :  $E(g(U)g(1 - W)) = E(g(U))E(g(1 - W)) = (E(g(U)))^2$ .

On montre de même que :  $E(g(W)g(1 - U)) = (E(g(U)))^2$ .

$U$  et  $W$  ayant même loi il en est de même de  $g(U)g(1 - U)$  et de  $g(W)g(1 - W)$ .

Alors  $E(g(U)g(1 - U)) = E(g(W)g(1 - W))$ .

Dans ces conditions l'inégalité  $E(g(U)g(1 - U)) - E(g(U)g(1 - W)) - E(g(W)g(1 - U)) + E(g(W)g(1 - W)) \leq 0$  devient :  $2E(g(U)g(1 - U)) - 2(E(g(U)))^2 \leq 0$ . Finalement :

$$\boxed{E[g(U)g(1 - U)] \leq (E[g(U)])^2.}$$



► *Remarque Un peu d'existence...*

Posons  $\forall x \in [0, 1], \check{g}(x) = g(x)g(1-x)$ .  $\check{g}$  est continue sur  $[0, 1]$ . On montre alors comme dans 3.1.1 que  $E(\check{g}(U))$  existe.

Ainsi  $E(g(U)g(1-U))$  existe. Alors  $E(g(W)g(1-W))$  existe également car  $\check{g}(U)$  et  $\check{g}(W)$  ont même loi puisque  $U$  et  $W$  ont même loi.

$g(U)$  et  $g(1-W)$  ont même loi sont indépendantes et possèdent la même espérance. Ceci suffit pour dire que  $E(g(U)g(1-W))$  existe (et vaut  $(E(g(U)))^2$ ). De même  $E(g(W)g(1-U))$  existe (et vaut  $(E(g(U)))^2$ ).

Ceci donne alors l'existence de  $E[(g(U) - g(W))(g(1-U) - g(1-W))]$  et permet de dire que cette espérance vaut :  $E(g(U)g(1-U)) - E(g(U)g(1-W)) - E(g(W)g(1-U)) + E(g(W)g(1-W))$ , non ?

c.  $Y - E(Y) = \frac{1}{2} [(g(U) - J) + (g(1-U) - J)]$ . Alors :

$$(Y - E(Y))^2 = \frac{1}{4} [(g(U) - J)^2 + (g(1-U) - J)^2 + 2(g(U) - J)(g(1-U) - J)].$$

$$(Y - E(Y))^2 = \frac{1}{4} [(g(U) - E(g(U)))^2 + (g(1-U) - E(g(1-U)))^2 + 2g(U)g(1-U) - 2Jg(U) - 2Jg(1-U) + 2J^2].$$

$(g(U) - E(g(U)))^2$  et  $(g(1-U) - E(g(1-U)))^2$  possèdent une espérance qui vaut  $\sigma^2$ .

$g(U)$  et  $g(1-U)$  possèdent une espérance qui vaut  $J$ .

Notons pour finir que  $g(U)g(1-U)$  possède également une espérance.

Alors  $(Y - E(Y))^2$  possède une espérance qui vaut  $\frac{1}{4} [\sigma^2 + \sigma^2 + 2E(g(U)g(1-U)) - 2J^2 - 2J^2 + 2J^2]$ .

Donc  $Y$  possède une variance qui vaut  $\frac{1}{2} [\sigma^2 + E(g(U)g(1-U)) - J^2]$ .

Alors d'après b,  $V(Y) \leq \frac{1}{2} [\sigma^2 + (E(g(U)))^2 - J^2] = \frac{1}{2} \sigma^2 = \frac{1}{2} V(g(U))$ . Finalement :

$$Y \text{ possède une variance et } V(Y) \leq \frac{1}{2} V(g(U)).$$

3. Reprenons la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Posons  $\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \frac{1}{2} (g(U_n) + g(1-U_n))$ .

Considérons la fonction  $\hat{g}: x \rightarrow \frac{1}{2} (g(x) + g(1-x))$ .  $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \hat{g}(U_n)$ .

► *Remarque A partir d'ici nous pourrions passer directement à la conclusion. En effet  $\hat{g}$  étant définie et continue sur  $[0, 1]$  nous pouvons utiliser 3.1.2.b.ii. en remplaçant  $g$  par  $\hat{g}$ . L'intervalle de confiance est alors celui de 3.1.2.b.ii. en remplaçant  $\sigma$  par  $\sigma'$ .*

Pour les incrédules, ramons ! Posons  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S'_n = \sum_{i=1}^n T_i$ .

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  a même loi que  $Y$ . En particulier pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $T_n$  possède une espérance qui vaut  $J$  et une variance qui vaut  $V(Y)$ .

Dans la suite nous poserons  $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$  et **nous supposons**  $\sigma'$  non nul (ce n'est pas le cas lorsque  $\forall x \in [0, 1], g(x) = x \dots$ ).

•  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes donc  $(\hat{g}(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes.

• Toutes les variables aléatoires de la suite  $(\hat{g}(U_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ont même loi, possèdent une espérance égale à  $J$  et une variance égale à  $\sigma'^2$ .

Dans ces conditions, la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{\frac{S'_n}{n} - E\left(\frac{S'_n}{n}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{S'_n}{n}\right)}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Un calcul simple donne  $E\left(\frac{S'_n}{n}\right) = J$  et  $\sqrt{V\left(\frac{S'_n}{n}\right)} = \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ .

Alors la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{\frac{S'_n}{n} - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Ici encore nous supposons que pour  $n$  assez grand  $\frac{S'_n - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}$  suit la loi normale centrée réduite.

On montre alors comme dans 3.1.2 que  $P\left(\left|\frac{S'_n - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = 2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$  et que

$$P\left(\left|\frac{S'_n - J}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}\right| \leq 1,96\right) = P\left(\frac{S'_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S'_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right) \text{ tout ceci pour } n \text{ assez grand.}$$

Ainsi  $P\left(\frac{S'_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}} \leq J \leq \frac{S'_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right) = 0,95$  pour  $n$  assez grand.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S'_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(g(U_i) + g(1 - U_i))$  et  $\sigma' = \sqrt{V(Y)}$ . Pour  $n$  assez grand  $\left[\frac{S'_n}{n} - 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}, \frac{S'_n}{n} + 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}\right]$  est un intervalle de confiance pour  $J$  au niveau de confiance 95 %.

$l_n = 2 \times 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$  et le nouvel intervalle de confiance a pour longueur  $l'_n = 2 \times 1,96 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ .

Pour avoir  $l'_N = l_n$  il faut et il suffit que  $N = n \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$  ! Oublions un peu la question (il semble difficile de trouver un  $N$  solution surtout lorsque l'on ne connaît ni  $\sigma$  ni  $\sigma'$  et que l'on veut  $N$  entier).

Contentons nous de dire que  $l'_N \leq l_n$  si et seulement si  $N \geq n \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$ . Remarquons alors que  $\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} = \frac{V(Y)}{V(g(U))} \leq \frac{1}{2}$ .

Donc dès que  $N \geq \frac{n}{2}$ , on a  $N \geq n \frac{\sigma'^2}{\sigma^2}$  et  $l'_N \leq l_n$ .

Avec cette nouvelle méthode, il suffit donc de faire  $\text{Ent}\left(\frac{n}{2}\right) + 1$  tirages de la variable aléatoire uniforme pour obtenir un intervalle de confiance de longueur au plus  $l_n$ .

### 3. 3. Réduction de la variance par stratification.

#### 3. 3. 1. Etude d'une fonction de plusieurs variables.

1.  $f$  est une fonction rationnelle (ou la restriction à  $(]0, +\infty[)^3$  d'une fonction rationnelle...) donc :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } (]0, +\infty[)^3.$$

Sans difficulté on obtient :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4x_1^2}, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{x_2^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{9x_3^2}.$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2x_1^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{x_2^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{9x_3^3}.$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in (]0, +\infty[)^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

2. Ce qui précède donne :

$$\forall A = (a_1, a_2, a_3) \in (]0, +\infty[)^3, \quad \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{a_2^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9a_3^3} \end{pmatrix}.$$

Soit  $A = (a_1, a_2, a_3)$  un élément de  $(]0, +\infty[)^3$  et soit  $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$  un élément non nul de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

Un calcul simple donne :  ${}^t H \nabla^2 f(A) H = \frac{h_1^2}{2a_1^3} + \frac{h_2^2}{a_2^3} + \frac{2h_3^2}{9a_3^3}$ . Alors  ${}^t H \nabla^2 f(A) H \geq 0$  car  $\frac{h_1^2}{2a_1^3}$ ,  $\frac{h_2^2}{a_2^3}$  et  $\frac{2h_3^2}{9a_3^3}$  sont positifs.

Mieux, comme  $H$  n'est pas nulle, l'un de ces trois réels est strictement positif et ainsi  ${}^t H \nabla^2 f(A) H > 0$ .

$$\forall A \in (]0, +\infty[)^3, \quad \forall H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}, \quad {}^t H \nabla^2 f(A) H > 0.$$

De toute évidence on a aussi :

$$\forall X \in (]0, +\infty[)^3, \quad \forall H \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t H \nabla^2 f(X) H \geq 0, \quad \text{non ?}$$

3.  $(]0, +\infty[)^3$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  comme produit de trois ouverts de  $\mathbb{R}$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $(]0, +\infty[)^3$ .

Ainsi si  $f$  admet en un point  $A = (a_1, a_2, a_3)$  de  $(]0, +\infty[)^3$  un extremum, alors le gradient de  $f$  en  $A$  s'annule donc  $\left(-\frac{1}{4a_1^2}, -\frac{1}{a_2^2}, -\frac{1}{9a_3^2}\right) = 0_{\mathbb{R}^3}$ . C'est hautement improbable !

$$f \text{ n'a pas d'extremum sur } (]0, +\infty[)^3.$$

4. Posons  $\mathcal{C} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 110\}$  et  $\forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $h(X) = x_1 + x_2 + x_3$ .

Notons que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et que :  $\forall X \in \mathbb{R}^3$ ,  $\nabla h(X) = (1, 1, 1)$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $(]0, +\infty[)^3$  et  $h$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^3$ .

Le cours indique alors que si  $f$  admet en un point  $A$  un extremum sous la contrainte  $\mathcal{C}$  alors  $\nabla f(A)$  appartient à l'orthogonal de  $\text{Ker } h$ .

Rappelons que  $(\text{Ker } h)^\perp$  est encore  $\text{Vect}(\nabla h(X))$  où  $X$  est un élément quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .

Donc  $(\text{Ker } h)^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1))$ .

Cherchons alors les points  $A$  de  $\mathcal{C} \cap (]0, +\infty[)^3$  tels que  $\nabla f(A)$  appartienne à  $\text{Vect}((1, 1, 1))$ , c'est à dire les points critiques de  $f$  sous la contrainte  $\mathcal{C}$ .

- Soit  $A = (a_1, a_2, a_3)$  un point critique de  $f$  sous la contrainte  $\mathcal{C}$ .

$A \in (]0, +\infty[)^3$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 = 110$  et  $\nabla f(A) \in \text{Vect}((1, 1, 1))$ .

$$\nabla f(A) = \left( -\frac{1}{4a_1^2}, -\frac{1}{a_2^2}, -\frac{1}{9a_3^2} \right) \in \text{Vect}((1, 1, 1)). \text{ Donc } -\frac{1}{4a_1^2} = -\frac{1}{a_2^2} = -\frac{1}{9a_3^2}.$$

Ceci donne  $4a_1^2 = a_2^2 = 9a_3^2$  puis  $2a_1 = a_2 = 3a_3$  car  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont positifs.

Alors  $110 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 2a_1 + \frac{2}{3}a_1 = \frac{11}{3}a_1$ . Ainsi  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 60$  et  $a_3 = 20$ . Finalement  $A = (30, 60, 20)$ .

- Réciproquement posons  $A = (30, 60, 20)$ .  $A$  appartient à  $(]0, +\infty[)^3$ .  $30 + 60 + 20 = 110$  donc  $A$  appartient à  $\mathcal{C}$ .

$$\text{De plus } \nabla f(A) = \left( -\frac{1}{4 \times 30^2}, -\frac{1}{60^2}, -\frac{1}{9 \times 20^2} \right) = \left( -\frac{1}{3600}, -\frac{1}{3600}, -\frac{1}{3600} \right) \in \text{Vect}((1, 1, 1)) = (\text{Ker } h)^\perp.$$

Donc  $A = (30, 60, 20)$  est un point critique de  $f$  sous la contrainte  $\mathcal{C}$ .

$$\boxed{A = (30, 60, 20) \text{ est l'unique point critique de } f \text{ sous la contrainte } \mathcal{C}.}$$

Soit  $X$  un élément de  $(]0, +\infty[)^3 \cap \mathcal{C}$ . Montrons que  $f(X) \geq f(A)$ . Posons  $H = X - A$ .  $X = H + A$ .

Attention ici  $H$  est un élément de  $\mathbb{R}^3$ .

Commençons par montrer que  $[A, A + H] = [A, X]$  est dans  $(]0, +\infty[)^3$ .

Soit  $Y$  un élément de  $[A, X]$ . Il existe un réel  $\lambda$  appartenant à  $[0, 1]$  tel que  $Y = \lambda A + (1 - \lambda) X$ .

Les composantes de  $A$  et  $X$  sont strictement positives et les réels  $\lambda$  et  $1 - \lambda$  sont positifs ou nuls sans être simultanément nuls. Alors les composantes de  $Y$  sont strictement positives.  $Y$  est donc un élément de  $(]0, +\infty[)^3$ .

$[A, A + H]$  est contenu dans  $(]0, +\infty[)^3$  et  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $(]0, +\infty[)^3$ .

Notons  $q_A$  la forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$  associée à la matrice symétrique  $\nabla^2 f(A)$ .

La formule de Taylor appliquée à  $f$  à l'ordre 1 montre qu'il existe un élément  $\theta$  de  $]0, 1[$  tel que :

$$f(A + H) = f(A) + \langle \nabla f(A), H \rangle + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H).$$

$A$  et  $X$  sont dans  $\mathcal{C}$  donc  $h(H) = h(X) - h(A) = 110 - 110 = 0$ . Alors  $H$  appartient à  $\text{Ker } h$ . Or  $\nabla f(A) \in (\text{Ker } h)^\perp$ .

Alors  $\langle \nabla f(A), H \rangle = 0$  et ainsi  $f(X) = f(A + H) = f(A) + \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H)$ .

$$\text{En posant } H = (h_1, h_2, h_3) \text{ on a } f(X) - f(A) = \frac{1}{2} q_{A+\theta H}(H) = \frac{1}{2} (h_1 \ h_2 \ h_3) \nabla^2 f(A + \theta H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En utilisant 2. on obtient alors } f(X) - f(A) = \frac{1}{2} (h_1 \ h_2 \ h_3) \nabla^2 f(A + \theta H) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Ainsi  $\forall X \in (]0, +\infty[)^3 \cap \mathcal{C}$ ,  $f(X) \geq f(A)$ .

$$\boxed{f \text{ admet en } A = (30, 60, 20) \text{ un minimum global sous la contrainte } \mathcal{C} \text{ qui vaut } \frac{11}{360}.$$

### 3. 3. 2. Méthode de stratification.

1.  $(\{T \in I_1\}, \{T \in I_2\}, \{T \in I_3\})$  est un système complet (ou quasi-complet) d'événements.

La formule des probabilités totales donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(\{T \in I_1\} \cap \{g(\tilde{U}) \leq x\}) + P(\{T \in I_2\} \cap \{g(\tilde{U}) \leq x\}) + P(\{T \in I_3\} \cap \{g(\tilde{U}) \leq x\}). \text{ Alors :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(\{T \in I_1\} \cap \{g(U_1) \leq x\}) + P(\{T \in I_2\} \cap \{g(U_2) \leq x\}) + P(\{T \in I_3\} \cap \{g(U_3) \leq x\}).$$

Rappelons que les variables aléatoires  $T, U_1, U_2$  et  $U_3$  sont indépendantes.

Alors les variables aléatoires  $T, g(U_1), g(U_2)$  et  $g(U_3)$  le sont également. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = P(T \in I_1) P(g(U_1) \leq x) + P(T \in I_2) P(g(U_2) \leq x) + P(T \in I_3) P(g(U_3) \leq x).$$

$T$  suit une loi uniforme sur  $[0, 1]$  et  $0 < a < b < 1$ . Alors :

$$P(T \in I_1) = P(0 \leq T < a) = a, P(T \in I_2) = P(a \leq T < b) = b - a \text{ et } P(T \in I_3) = P(b \leq T \leq 1) = 1 - b.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, P(g(\tilde{U}) \leq x) = a P(g(U_1) \leq x) + (b - a) P(g(U_2) \leq x) + (1 - b) P(g(U_3) \leq x).}$$

Soient  $F_{g(U_1)}, F_{g(U_2)}, F_{g(U_3)}$  et  $F_{g(\tilde{U})}$  les fonctions de répartition respectives de  $g(U_1), g(U_2), g(U_3)$  et  $g(\tilde{U})$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{g(\tilde{U})}(x) = a F_{g(U_1)}(x) + (b - a) F_{g(U_2)}(x) + (1 - b) F_{g(U_3)}(x).$$

$F_{g(U_1)}, F_{g(U_2)}$  et  $F_{g(U_3)}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  donc, par combinaison linéaire,  $F_{g(\tilde{U})}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Soient  $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$  et  $f_{g(U_3)}$  des densités respectives de  $g(U_1), g(U_2)$  et  $g(U_3)$  définies sur  $\mathbb{R}$ .

$f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$  et  $f_{g(U_3)}$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  privé d'un ensemble fini de points. Alors on peut trouver une partie finie  $D$  de  $\mathbb{R}$  telle que  $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$  et  $f_{g(U_3)}$  soient toutes les trois continues sur  $\mathbb{R} - D$ .

Dans ces conditions  $F_{g(U_1)}, F_{g(U_2)}$  et  $F_{g(U_3)}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} - D$ .

$$\text{De plus } \forall x \in \mathbb{R} - D, F'_{g(U_1)}(x) = f_{g(U_1)}(x), F'_{g(U_2)}(x) = f_{g(U_2)}(x) \text{ et } F'_{g(U_3)}(x) = f_{g(U_3)}(x).$$

Alors  $F_{g(\tilde{U})}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} - D$  où  $D$  est finie et continue sur  $\mathbb{R}$ .  $g(\tilde{U})$  est donc une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R} - D, F'_{g(\tilde{U})}(x) = a F'_{g(U_1)}(x) + (b - a) F'_{g(U_2)}(x) + (1 - b) F'_{g(U_3)}(x) = a f_{g(U_1)}(x) + (b - a) f_{g(U_2)}(x) + (1 - b) f_{g(U_3)}(x).$$

$a f_{g(U_1)} + (b - a) f_{g(U_2)} + (1 - b) f_{g(U_3)}$  est une fonction définie et positive sur  $\mathbb{R}$  qui coïncide avec  $F'_{g(\tilde{U})}$  sur  $\mathbb{R}$  privé d'un ensemble fini de points. C'est donc une densité de  $g(\tilde{U})$ .

Soient  $f_{g(U_1)}, f_{g(U_2)}$  et  $f_{g(U_3)}$  des densités respectives de  $g(U_1), g(U_2)$  et  $g(U_3)$ , définies sur  $\mathbb{R}$ .

$g(\tilde{U})$  est une variable aléatoire à densité admettant pour densité la fonction

$$f_{g(\tilde{U})} = a f_{g(U_1)} + (b - a) f_{g(U_2)} + (1 - b) f_{g(U_3)}.$$

Supposons que  $\forall x \in [0, 1], g(x) = x$ . Alors  $g(\tilde{U}) = \tilde{U}, g(U_1) = U_1, g(U_2) = U_2$  et  $g(U_3) = U_3$ .

$g(U_1), g(U_2)$  et  $g(U_3)$  sont bien des variables aléatoires à densité. Posons :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_{U_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } x \in [0, a[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{U_2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{si } x \in [a, b[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f_{U_3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - b} & \text{si } x \in [b, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $f_{U_i}$  est une densité de  $U_i$  ou de  $g(U_i)$ .

D'après ce précède  $g(\tilde{U})$  donc  $\tilde{U}$  est une variable aléatoire à densité admettant  $a f_{U_1} + (b - a) f_{U_2} + (1 - b) f_{U_3}$  pour densité.

$$\text{Posons } f_{\tilde{U}} = a f_{U_1} + (b - a) f_{U_2} + (1 - b) f_{U_3}.$$

$$\forall x \in [0, a[, f_{\tilde{U}}(x) = a f_{U_1}(x) + (b-a) f_{U_2}(x) + (1-b) f_{U_3}(x) = a \frac{1}{a} + (b-a) \times 0 + (1-b) \times 0 = 1.$$

On montre de même que  $\forall x \in [a, b[, f_{\tilde{U}}(x) = 1$  et que  $\forall x \in [b, 1], f_{\tilde{U}}(x) = 1$ .

De plus :  $\forall x \in \mathbb{R} - [0, 1], f_{\tilde{U}}(x) = a \times 0 + (b-a) \times 0 + (1-b) \times 0 = 0$ . Finalement :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_{\tilde{U}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Ainsi :

$$\boxed{\tilde{U} \text{ suit une (la) loi uniforme sur } [0, 1].}$$

**2.**  $U_1$  prend ses valeurs dans  $I_1 = [0, a[$  et  $g$  est continue sur cet intervalle. Alors le théorème de transfert montre que  $g(U_1)$  possède une espérance si et seulement si  $\int_0^a g(t) f_{U_1}(t) dt$  est absolument convergente.

Ceci est clair car  $\forall t \in [0, a[, |g(t) f_{U_1}(t)| = \frac{1}{a} |g(t)|$  et  $|g|$  est continue sur  $[0, 1]$  (oui sur  $[0, 1]$  !)

Finalement  $E(g(U_1))$  possède une espérance. On montre de même que  $E(g(U_2))$  et  $E(g(U_3))$  existent.

Ce qui précède donne aussi l'existence des intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t) dt$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t) dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_3)}(t) dt$ .

Or  $\forall t \in \mathbb{R}, t f_{g(\tilde{U})}(t) = a t f_{g(U_1)}(t) + (b-a) t f_{g(U_2)}(t) + (1-b) t f_{g(U_3)}(t)$ .

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t) dt$  existe et vaut :  $a \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_1)}(t) dt + (b-a) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_2)}(t) dt + (1-b) \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(U_3)}(t) dt$

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{g(\tilde{U})}(t) dt$  existe et vaut :  $a E(g(U_1)) + (b-a) E(g(U_2)) + (1-b) E(g(U_3))$ . Par conséquent :

$$\boxed{g(\tilde{U}) \text{ possède une espérance qui vaut } a E(g(U_1)) + (b-a) E(g(U_2)) + (1-b) E(g(U_3)).}$$

**3.** Les variables aléatoires de la suite  $(U_{1,1}, \dots, U_{1,n_1}, U_{2,1}, \dots, U_{2,n_2}, U_{3,1}, \dots, U_{3,n_3})$  étant indépendantes il en est de même de celles de la suite  $(g(U_{1,1}), \dots, g(U_{1,n_1}), g(U_{2,1}), \dots, g(U_{2,n_2}), g(U_{3,1}), \dots, g(U_{3,n_3}))$ . De plus les variables aléatoires de cette suite possèdent une variance. Alors  $Z$  possède une variance et :

$$V(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_1} V(g(U_{1,i})) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_2} V(g(U_{2,i})) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right)^2 \sum_{i=1}^{n_3} V(g(U_{3,i})).$$
 Notons que :

$$\forall i \in [1, n_1], V(g(U_{1,i})) = V(g(U_1)), \forall i \in [1, n_2], V(g(U_{2,i})) = V(g(U_2)) \text{ et } \forall i \in [1, n_3], V(g(U_{3,i})) = V(g(U_3)).$$

Alors  $V(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right)^2 n_1 V(g(U_1)) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right)^2 n_2 V(g(U_2)) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right)^2 n_3 V(g(U_3))$ . Finalement

$$\boxed{Z \text{ possède une variance et } V(Z) = a^2 \frac{1}{n_1} V(g(U_1)) + (b-a)^2 \frac{1}{n_2} V(g(U_2)) + (1-b)^2 \frac{1}{n_3} V(g(U_3)).}$$

**4.** Dans ces conditions  $V(Z) = \frac{1}{4n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{9n_3}$ .

On cherche donc  $(n_1, n_2, n_3)$  dans  $(\mathbb{N}^*)^3$  tel que  $n_1 + n_2 + n_3 = 110$  et tel que  $V(Z)$  soit minimum.

3.3.1 indique que  $(30, 60, 20)$  est le seul triplet qui convient.

Remarquons alors que :  $E(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right) \sum_{i=1}^{n_1} E(g(U_{1,i})) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right) \sum_{i=1}^{n_2} E(g(U_{2,i})) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right) \sum_{i=1}^{n_3} E(g(U_{3,i}))$ .

Notons que :

$$\forall i \in [1, n_1], E(g(U_{1,i})) = E(g(U_1)), \forall i \in [1, n_2], E(g(U_{2,i})) = E(g(U_2)) \text{ et } \forall i \in [1, n_3], E(g(U_{3,i})) = E(g(U_3)).$$

Alors  $E(Z) = \left(a \frac{1}{n_1}\right) n_1 E(g(U_1)) + \left((b-a) \frac{1}{n_2}\right) n_2 E(g(U_2)) + \left((1-b) \frac{1}{n_3}\right) n_3 E(g(U_3))$ .

Donc  $E(Z) = a E(g(U_1)) + (b-a) E(g(U_2)) + (1-b) E(g(U_3)) = E(g(\tilde{U}))$ . Finalement :  $E(Z) = E(g(\tilde{U}))$ .

Or  $\tilde{U}$  a même loi que  $U$  donc  $g(\tilde{U})$  a même loi que  $g(U)$  et ainsi  $E(g(\tilde{U})) = E(g(U)) = J$ .

$$E(Z) = J.$$

Pour que  $E(Z)$  fournisse une estimation de  $J$  ( ? ? ) avec le plus petit risque d'erreur possible suivant cette méthode il convient de donner à  $n_1, n_2, n_3$  les valeurs 30, 60 et 20.

---