Correction de l'épreuve A de mathématiques

(durée : 3 h 30)

Problème 1

Dans ce problème, on note $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id *l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et O l'application nulle. Pour tout couple de nombres réels (a,b), on note $J(a,b)$ la matrice*

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\cdot$$

Enfin, on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot$$

1. *Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a $[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}\cdot$*

   Procédons par récurrence.

   Initialisation : Pour $n=1$, on a $\begin{pmatrix} a^1 & 1a^0 & 0 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 0 & 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = [J(a,b)]^1$, ce qui démontre que la propriété est vraie au rang 1.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la relation est vraie au rang n et démontrons la au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
[J(a,b)]^{n+1} &= [J(a,b)]^n \cdot J(a,b) \\
&= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

   ce qui démontre la relation au rang $n+1$.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad [J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}\cdot}$$

2. a) *Montrer que* $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$.

On a
$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} -14 & 33 & -18 \\ 6 & -8 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$
ce qui donne, après calculs,
$$M^3 + M^2 - 5M + 3I_3 = 0.$$
Or, comme M est la matrice de Φ dans la base canonique $\mathcal{E}$, on sait, d'après le cours, que $M^3 + M^2 - 5M + 3I_3$ et la matrice de $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id}$ dans cette même base. Ainsi, la relation matricielle ci-dessus se traduit par
$$\boxed{\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O.}$$

b) *On note* $\Pi(X)$ *le polynôme* $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. *Montrer que* $\Pi(X)$ *possède une racine double que l'on explicitera.*

On constate que 1 est une racine évidente de Π. De plus, $\Pi'(X) = 3X^2 + 2X - 5$ d'où $\Pi'(1) = 0$. Ainsi, d'après le cours, on peut affirmer que 1 est une racine (au moins) double de Π. Par suite, on peut factoriser $\Pi(X)$ sous la forme $\Pi(X) = 1(X-1)^2(X-a)$ où a désigne la dernière racine de Π. En identifiant les coefficients constants dans les deux expressions de $\Pi(X)$, on obtient $-a = 3$, d'où $a = -3$. Par suite,
$$\boxed{\Pi(X) \text{ admet 1 comme racine double et } -3 \text{ comme racine simple.}}$$

c) *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $u \in \mathbb{R}^3$ *un vecteur non nul tels que* $\Phi(u) = \lambda u$. *Montrer que* $\Pi(\lambda) = 0$.

Comme $\Phi(u) = \lambda u$, on a $\Phi^2(u) = \Phi\big(\Phi(u)\big) = \Phi(\lambda u) = \lambda\Phi(u) = \lambda^2 u$ et $\Phi^3(u) = \Phi\big(\Phi^2(u)\big) = \Phi(\lambda^2 u) = \lambda^2\Phi(u) = \lambda^3 u$. Par suite, comme $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$, on a
$$\begin{aligned} 0 &= (\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id})(u) \\ &= \Phi^3(u) + \Phi^2(u) - 5\Phi(u) + 3\,\mathrm{Id}(u) \\ &= \lambda^3 u + \lambda^2 u - 5\lambda u + 3u \\ &= (\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3)u, \end{aligned}$$
d'où $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ puisque $u \neq 0$. Donc
$$\boxed{\Pi(\lambda) = 0.}$$

3. a) *Donner une base du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$ *formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base* $\mathcal{E}$ *égale à* 1.

La matrice de $\Phi + 3\,\mathrm{Id}$ dans la base $\mathcal{E}$ est $M + 3I_3$. Pour trouver le noyau de $\Phi + 3\,\mathrm{Id}$, il suffit de chercher les vecteurs $u = (a, b, c)$ tel que $(\Phi + 3\,\mathrm{Id})(u) = 0$, c'est-à-dire
$$\begin{aligned}
(M + 3I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} 2a & +5b & -3c & = 0 & (L_1) \\ \boxed{a} & +3b & & = 0 & (L_2) \\ & b & +3c & = 0 & (L_3) \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & -\ b & -3c & = 0 & (L_1) \longleftarrow (L_1 - 2L_2) \\ \boxed{a} & +3b & & = 0 & (L_2) \\ & \boxed{b} & +3c & = 0 & (L_3) \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrll} & & 0 & = 0 & (L_1) \longleftarrow (L_1 + L_3) \\ \boxed{a} & +3b & & = 0 & (L_2) \\ & \boxed{b} & +\ 3c & = 0 & (L_3) \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} a = & 9\lambda \\ b = & -3\lambda \\ c = & \lambda \end{array}\right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$
Donc
$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id}) \text{ est la droite vectorielle de } \mathbb{R}^3 \text{ dirigée par le vecteur } (9, -3, 1).}$$

b) *Donner une base du sous-espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$ *formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base* $\mathcal{E}$ *égale à* 1.

La matrice de $\Phi - \mathrm{Id}$ dans la base canonique est $M - I_3$. Pour déterminer le noyau de $\Phi - \mathrm{Id}$, il suffit de rechercher les vecteurs $u = (a, b, c)$ tel que $(\Phi - \mathrm{Id})(u) = 0$, c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
(M - I_3)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad & \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrll} -2a & +5b & -3c & = 0 & (L_1) \\ \boxed{a} & -\ b & & = 0 & (L_2) \\ & b & -\ c & = 0 & (L_3) \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrll} & 3b & -3c & = 0 & (L_1) \longleftarrow (L_1 + 2L_2) \\ \boxed{a} & -\ b & 0 & = 0 & (L_2) \\ & b & \boxed{-c} & = 0 & (L_3) \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrll} & & 0 & = 0 & (L_1) \longleftarrow (L_1 + 3L_3) \\ \boxed{a} & -\ b & 0 & = 0 & (L_2) \\ & b & \boxed{-c} & = 0 & (L_3) \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rl} a = & \lambda \\ b = & \lambda \\ c = & \lambda \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) \text{ est la droite vectorielle de } \mathbb{R}^3 \text{ dirigée par le vecteur } (1, 1, 1).}$$

c) Φ *est-elle diagonalisable ?*

Nous avons vu à la question 2 que Φ admet deux valeurs propres qui sont 1 et -3. Les deux questions précédentes nous permettent de dire que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont tous les deux de dimension 1. Par suite, la somme des dimensions des sous-espaces propres de Φ est égale à 2 alors que la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3. On en déduit, d'après le cours, que

$$\boxed{\Phi \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

4. a) *Trouver* $x \in \mathbb{R}^3$*, de dernière coordonnée sur la base* $\mathcal{E}$ *égale à* 1*, tel que* $\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i$.

Posons $x = (a, b, c)$. On a

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i\right) \quad & \iff \quad M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrll} -2a & +5b & -3c & = 1 & (L_1) \\ \boxed{a} & -\ b & & = 1 & (L_2) \\ & b & -\ c & = 1 & (L_3) \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrll} & 3b & -3c & = 3 & (L_1) \longleftarrow (L_1 + 2L_2) \\ \boxed{a} & -\ b & & = 1 & (L_2) \\ & \boxed{b} & -\ c & = 1 & (L_3) \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rrrll} & & 0 & = 0 & (L_1) \longleftarrow (L_1 - 3L_3) \\ \boxed{a} & -\ b & & = 1 & (L_2) \\ & \boxed{b} & -\ c & = 1 & (L_3) \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rr} a = & 2 + \lambda \\ b = & 1 + \lambda \\ c = & \lambda \end{array} \right. \quad (\lambda \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

Donc, pour choisir une solution de ce système dont la dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ est égale à 1, il faut et suffit de prendre $\lambda = 1$, ce qui donne $(a, b, c) = (3, 2, 1)$. Donc

$$\boxed{x = (3, 2, 1).}$$

b) *Donner une base du sous-espace vectoriel* $E = \mathrm{Ker}([\Phi - \mathrm{Id}]^2)$ *formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base* $\mathcal{E}$ *égale à* 1.

Comme $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}([\Phi - \mathrm{Id}]^2)$, le vecteur directeur $(1, 1, 1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ de la droite $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$ appartient aussi à E. D'autre part, le vecteur x de la question précédente vérifie $\Phi(x) = x+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$, donc $\Phi(x)-x \in \mathrm{Ker}(\Phi-\mathrm{Id})$. Cela signifie que $x \in E$. Nous disposons ainsi de deux vecteurs : $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1, 1, 1)$ et $x = (3, 2, 1)$, qui appartiennent à E. Comme ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre de E.
Par ailleurs, la matrice de $(\Phi - \mathrm{Id})^2$ dans la base canonique est

$$(M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\mathrm{rang}\left((M - I_3)^2\right) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -3 & 6 & -3 \\ \boxed{1} & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -2 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

ce qui implique, d'après le théorème du rang, que $\dim E = 2$.
Les deux vecteurs $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ et x forment donc une famille libre de deux vecteurs du sous-espace E qui est de dimension 2, ce qui implique que

$$\boxed{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, x) = \left((1, 1, 1), (3, 2, 1)\right) \text{ est une base de } E.}$$

c) *Montrer que* $\Phi(E) \subset E$ *et que* $\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$.

Soit $v \in \Phi(E)$ de sorte qu'il existe $u \in E$ tel que $v = \Phi(u)$. Alors $\Phi(v) = \Phi^2(u) = 0$ car $u \in E$, donc $v \in \mathrm{Ker}([\Phi - \mathrm{Id}]^2)$, c'est-à-dire $v \in E$. Donc

$$\boxed{\Phi(E) \subset E.}$$

Pour montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})$, il suffit de prouver que $E \cap \mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id}) = \{0\}$ et $\dim E + \dim\left(\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})\right) = 3$. Cette dernière relation est clairement vérifiée puisque l'on sait que $\dim E = 2$ d'après la question précédente et $\dim\left(\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})\right) = 1$ d'après la question 3.a). Par ailleurs, si $u \in E \cap \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$, alors $\Phi^2(u) = u$ et $\Phi(u) = 3u$, donc $u = \Phi^2(u) = \Phi\left(\Phi(u)\right) = \Phi(3u) = 3\Phi(u) = 9u$, ce qui implique que $u = 0$, d'où $E \cap \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id}) = \{0\}$. Par conséquent,

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id}).}$$

5. a) *Donner une base de* $\mathbb{R}^3$*, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base* E *égale à* 1*, dans laquelle la matrice de* Φ *vaut* $M' = J(1, -3)$.

Comme $\mathbb{R}^3 = E \oplus \mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$, on sait, d'après le cours, que la réunion d'une base de E et d'une base de $\mathrm{Ker}(\Phi+3\,\mathrm{Id})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Par suite, la famille de vecteurs $\mathcal{B} = \left((1, 1, 1), (3, 2, 1), (9, -3, 1)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Or $\Phi(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$, $\Phi(3, 2, 1) = (1, 1, 1) + (3, 2, 1)$ et $\Phi(9, -3, 1) = -3(9, -3, 1)$, donc la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J(1; -3).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{dans la base } \mathcal{B} = \left((1, 1, 1), (3, 2, 1), (9, -3, 1)\right)\text{, la matrice de } \Phi \text{ est } M' = J(1, -3).}$$

b) *Exprimer, pour tout n entier naturel, la matrice M^n à l'aide de n, M', P et P^{-1} où P est une matrice bien choisie. Calculer la première colonne de M^n.*

On sait, d'après le cours et la question précédente, que si P désigne la matrice de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique $\mathcal{E}$, on a $M = PM'P^{-1}$. Par suite

$$\begin{aligned} M^n &= \underbrace{(PM'P^{-1})(PM'P^{-1})\cdots(PM'P^{-1})}_{n \text{ facteurs } PM'P^{-1}} \\ &= PM'\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}M'\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}M'P^{-1}\cdots PM'\underbrace{P^{-1}P}_{=I_3}M'P^{-1} \\ &= P(M')^nP^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{M^n = P(M')^nP^{-1} \qquad \text{avec} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot}$$

Déterminons P^{-1}. Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Alors

$$PX = Y \iff \left\{\begin{array}{llll} \boxed{x} & +3y & +9z & = a \quad (L_1) \\ x & +2y & -3z & = b \quad (L_2) \\ x & +\ y & +\ z & = c \quad (L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} \boxed{x} & +3y & +\ 9z & = a \quad (L_1) \\ & -\ y & -12z & = b-a \quad (L_2) \longleftarrow (L_2 - L_1) \\ & \boxed{-2y} & -\ 8z & = c-a \quad (L_3) \longleftarrow (L_3 - L_1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} \boxed{x} & +3y & +\ 9z & = a \quad (L_1) \\ & & \boxed{16z} & = a-2b+c \quad (L_2) \longleftarrow (-2L_2 + L_3) \\ & \boxed{-2y} & -\ 8z & = c-a \quad (L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{llll} x = & -\dfrac{5}{12}a & -\dfrac{6}{12}b & +\dfrac{27}{16}c \\ y = & \dfrac{4}{16}a & +\dfrac{8}{16}b & -\dfrac{12}{16}c \\ z = & \dfrac{1}{16}a & -\dfrac{2}{16}b & +\dfrac{1}{16}c \end{array}\right.$$

d'où

$$P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot$$

On sait, d'après la question 1, que

$$(M')^n = [F(1;-3)]^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} M^n = P(M')^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5+4n & \clubsuit & \heartsuit \\ 4 & \diamondsuit & \spadesuit \\ (-3)^n & \blacksquare & \square \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7+4n+9\,(-3)^n & \oplus & \ominus \\ 3+4n-3\,(-3)^n & \otimes & \odot \\ -1+4n+(-3)^n & \circledast & \oslash \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\boxed{\text{la première colonne de } M^n \text{ est } \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7+4n+9\,(-3)^n \\ 3+4n-3\,(-3)^n \\ -1+4n+(-3)^n \end{pmatrix}.}$$

6. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite à valeurs réels définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}$.*

   a) *Élaborer un programme dans le langage de votre choix afin de calculer u_{15} (indiquer le langage choisi).*

   En SCILAB :

```
a = 1; b = 0; c = 0;
for i = 1 : 13 do
  A = a; B = b;
  a = -a + 5 * b - 3 * a; b = A; c = B;
end
a
```

   b) *Déduire du 6. a) une valeur exacte de u_{15}.*

   En implémentant l'algorithme précédent (ou une version adaptée) dans une calculatrice, on obtient

$$\boxed{u_{15} = -896\,803.}$$

   c) *Dans les trois dernières questions, on note $(U_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n) dans la base E. Montrer que, pour tout n entier naturel, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.*

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$MU_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = U_n,$$

   où l'avant-dernière égalité découle de la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad U_n = \Phi(U_{n-1}).}$$

   d) *En déduire que, pour tout n entier naturel, $U_n = \Phi^n(U_0)$ puis, à l'aide de 5. b), une expression de u_n.*

   Procédons par récurrence.
   <u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, on a $\Phi^0(U_0) = \mathrm{Id}(U_0) = U_0$ donc la relation est vérifiée pour $n = 0$.
   <u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = \Phi^n(U_0)$ et démontrons cette relation au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1}(U_0) &= \Phi\big(\Phi^n(U_0)\big) \\ &= \Phi(U_n) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= U_{n+1} \qquad \text{d'après le résultat de la question 6. c),} \end{aligned}$$

   donc la relation est justifiée au rang $n+1$.
   <u>Conclusion :</u> D'après le principe de récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = \Phi^n(U_0).}$$

La relation précédente se traduit matriciellement par l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot$$

Or le second membre de cette égalité correspond à la première colonne de M^n, donc, d'après le résultat de la question 5. b),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 7 + 4n + 9\,(-3)^n \\ 3 + 4n - 3\,(-3)^n \\ -1 + 4n + (-3)^n \end{pmatrix},$$

ce qui donne, en identifiant les troisièmes coordonnées de ces deux vecteurs colonnes,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{-1 + 4n + (-3)^n}{16} \cdot}$$

e) *Vérifier pour $n = 15$ le résultat obtenu au 6. b) grâce à la méthode du 6. d).*

Pour $n = 15$, on a

$$u_{15} = \frac{-1 + 4 \times 15 + (-3)^{15}}{16} = -896\,803.$$

On retrouve bien la valeur de u_{15} obtenu par le procédé itératif de la question 6. b).

Problème 2

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ donnée par $(1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=\varphi(x)$.

Partie I. *On note G, F les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ G(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F(x)=G(x)/(\mathrm{e}^x-1)$.*

1. *Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

   La fonction G est une primitive (celle qui s'annule en 0) de l'application continue $t\longmapsto \mathrm{e}^t\varphi(t)$, donc G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. On a ainsi démontré que

$$\boxed{G \text{ et } F \text{ sont des applications de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. a) *Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire que le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 est $F(x)=\varphi(0)+\dfrac{x}{2}\varphi'(0)+o(x)$.*

   La fonction $t\longmapsto \mathrm{e}^t\varphi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de telles fonctions et admet donc, d'après le cours, un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par

$$\mathrm{e}^t\varphi(t)=\big(1+t+o(t)\big)\big(\varphi(0)+\varphi'(0)t+o(t)\big)=\varphi(0)+\big(\varphi(0)+\varphi'(0)\big)t+o(t).$$

   En intégrant entre 0 et x (ce qui est possible d'après le cours), on obtient le développement limité à l'ordre 2 de la fonction G, ce qui prouve que

$$\boxed{\begin{array}{l} G \text{ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0} \\ \text{donné par } G(x)=\varphi(0)x+\dfrac{\varphi(0)+\varphi'(0)}{2}x^2+o_{x\to 0^+}(x^2). \end{array}}$$

   Pour obtenir le développement limité à l'ordre 1 de F en 0, on commence par rechercher un tel développement pour la fonction $x/(\mathrm{e}^x-1)$. On a, d'après le cours,

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o_{x\to 0}(x^2),$$

   donc

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{x}{x+\dfrac{x^2}{2}+o_{x\to 0}(x^2)}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)}=1-\frac{x}{2}+o_{x\to 0}(x).$$

   où l'avant dernière égalité découle du développement limité de $1/(1+h)$ à l'ordre 2 en 0 donné par $1/(1+h)=1-h+o_{h\to 0}(h)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\forall x\geqslant 0,\qquad F(x)&=\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}\\ &=\frac{\varphi(0)x+\big(\varphi(0)+\varphi'(0)\big)x^2/2+o_{x\to 0^+}(x^2)}{\mathrm{e}^x-1}\\ &=\Big(\varphi(0)+\frac{\varphi(0)+\varphi'(0)}{2}x+o_{x\to 0^+}(x)\Big)\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\\ &=\Big(\varphi(0)+\frac{\varphi(0)+\varphi'(0)}{2}x+o_{x\to 0^+}(x)\Big)\Big(1-\frac{x}{2}+o_{x\to 0}(x)\Big)\\ &=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{2}x+o_{x\to 0^+}(x).\end{aligned}$$

   Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0} \\ \text{donné par } F(x)=\varphi(0)+\dfrac{\varphi'(0)}{2}x+o_{x\to 0^+}(x). \end{array}}$$

b) *En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.*

Le développement limité à l'ordre 1 de la fonction F que nous venons de déterminer permet d'affirmer que F admet en 0 une limite finie égale à $\varphi(0)$. On en déduit que

$$\boxed{F \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } F(0)=\varphi(0).}$$

Pour $x>0$, on a

$$\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{1}{x}\Big(\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{2}x+o_{x\to 0^+}(x)-\varphi(0)\Big)=\frac{\varphi'(0)}{2}+o_{x\to 0^+}(1),$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{\varphi'(0)}{2},$$

ce qui signifie que

$$\boxed{F \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } F'(0)=\frac{\varphi'(0)}{2}.}$$

3. *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0) : (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=0$. Indication : On pourra remarquer que (E_0) est équivalente à $y'(x)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}y(x)=0$.*

Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $1-\mathrm{e}^{-x}\neq 0$, donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, $(\mathcal{E}_0)$ est équivalente à $y'(x)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}y(x)=0$. D'après le cours, on sait que les solutions de l'équation de cette équation sont de la forme

$$\forall x>0,\qquad y_h(x)=\lambda\exp\left\{-\int^x\frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u-1}\mathrm{d}u\right\}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\ln|\mathrm{e}^x-1|}=\frac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1},$$

Donc

$$\boxed{\forall x>0,\qquad y(x)=\frac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}\qquad(\lambda\in\mathbb{R}).}$$

4. *Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

On sait déjà que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall x>0,\qquad F'(x)=\frac{G'(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}=\frac{\mathrm{e}^x\varphi(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2},$$

donc

$$(1-\mathrm{e}^{-x})F'(x)+F(x)=(1-\mathrm{e}^{-x})\Big(\frac{\mathrm{e}^x\varphi(x)}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}\Big)+\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}=\varphi(x)-\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}+\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}=\varphi(x).$$

Ainsi,

$$\boxed{F \text{ vérifie } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5. a) *Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

D'après le cours, les solutions générales de $(\mathcal{E})$ s'obtiennent en ajoutant la solution particulière F de $(\mathcal{E})$ aux solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ déterminées à la question 3. Ainsi,

$$\boxed{\text{les solutions générales de } (\mathcal{E}) \text{ sont de la forme } \forall x>0,\ y(x)=F(x)+\frac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}\ (\lambda\in\mathbb{R}).}$$

b) *Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.*

Soit y une solution de $(\mathcal{E})$ donnée par $y(x)=F(x)+\dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x-1}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $\lambda\neq 0$, on a $\lim_{x\to 0^+}\lambda/(\mathrm{e}^x-1)=\pm\infty$ (selon le signe de λ) et $\lim_{x\to 0^+}F(x)=F(0)=\varphi(0)$, donc $\lim_{x\to 0^+}y(x)=\pm\infty$. Au contraire, lorsque $\lambda=0$, on a $y=F$ donc y tend vers $\varphi(0)$ en 0. Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est la seule solution de } (\mathcal{E}) \text{ qui admette une limite finie en } 0^+ \text{ égale à } \varphi(0).}$$

6. *La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$?*

On sait déjà que F est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour savoir si c'est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$, il faut regarder si la relation $(1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=\varphi(x)$ est vérifiée en 0 pour $y=F$. Or, d'après la question 2. b),

$$(1-\mathrm{e}^{-0})F'(0)+F(0)=(1-1)\frac{\varphi'(0)}{2}+\varphi(0)=\varphi(0),$$

donc

$$\boxed{F \text{ est une solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

7. *On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

   a) *Montrer que, pour tout $x>0$, on a $\varphi(x)\leqslant F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x=0$?*

   Soit $x>0$. L'application φ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall t\in[0;x]\,,\ \varphi(t)\geqslant\varphi(x)$ et donc $\forall t\in[0;x]\,,\ \mathrm{e}^t\varphi(t)\geqslant\mathrm{e}^t\varphi(x)$ puisqu'une exponentielle est toujours positive. Combinée avec la croissance de l'intégrale, cette inégalité implique que

   $$\int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(x)\,\mathrm{d}t,$$

   c'est-à-dire

   $$G(x)\geqslant\varphi(x)\int_0^x \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t=\varphi(x)(\mathrm{e}^x-1),$$

   ou encore

   $$\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}\geqslant\varphi(x).$$

   Donc

   $$\boxed{\forall x>0,\qquad F(x)\geqslant\varphi(x).}$$

   Cette relation reste vraie en $x=0$ puisque F et φ coïncide en 0. Donc

   $$\boxed{\forall x\geqslant 0,\qquad F(x)\geqslant\varphi(x).}$$

   b) *Déduire du I. 7. a) que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

   On sait que F est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x\geqslant 0,\ (1-\mathrm{e}^{-x})F'(x)+F(x)=\varphi(x)$. Or, d'après la question précédente, on a $\forall x\geqslant 0,\ F(x)>\varphi(x)$, donc $\forall x\geqslant 0,\ (1-\mathrm{e}^{-x})F'(x)\leqslant 0$, ce qui implique que $\forall x\geqslant 0,\ F'(x)\leqslant 0$ puisque $\forall x\geqslant 0,\ 1-\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$. Par suite,

   $$\boxed{F \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Partie II. *On suppose dans la suite du problème que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}$.*

1. a) *Déterminer explicitement $F(x)$.*

   Pour tout $x>0$, on a

   $$F(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t=\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\cdot$$

   En 0, on a $F(0)=\varphi(0)=1$. Donc

   $$\boxed{\forall x\geqslant 0,\qquad F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1} & \text{si } x>0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}}$$

b) *Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.*

On a

$$\mathrm{e}^x - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0^+}(x^2)\right) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0^+}(x^2),$$

donc, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2 + x^3/6 + o_{x\to 0^+}(x^2)} = \frac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + o_{x\to 0^+}(x^2)}$$

ce qui donne

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o_{x\to 0^+}(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_{x\to 0^+}(x^2)$$

donc

$$\boxed{F(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_{x\to 0^+}(x^2)\cdot}$$

c) *Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.*

Pour compléter l'étude de F, il reste à regarder son comportement asymptotique en $+\infty$. Or, d'après le théorème des croissances comparées, on a

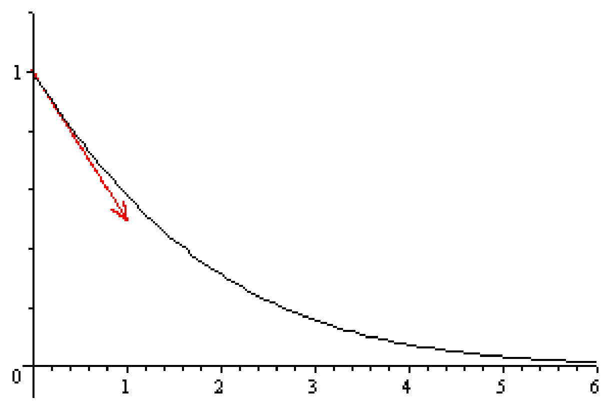
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de F et la représenter graphiquement (en bonus) :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-\frac{1}{2}$ $\quad -$	
$F(x)$	$1 \searrow$	0



2. *On note Φ la primitive de F définie sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.*

a) *Montrer que $\forall x \geqslant 4,\ x \leqslant \mathrm{e}^{x/2} - 1$ puis que $\forall x \geqslant 4,\ F(x) \leqslant 1/(\mathrm{e}^{x/2} + 1) \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}$. En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.*

Considérons la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{x/2} - x - 1$ définie sur $[4; +\infty[$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[4; +\infty[$ d'après les théorèmes généraux. On a $\forall x \geqslant 4,\ g'(x) = \mathrm{e}^{x/2}/2 - 1$ et $g''(x) = \mathrm{e}^{x/2}/4 \geqslant 0$. Par suite, g' est croissante. Or $g'(4) = \mathrm{e}^2/2 - 1 \geqslant 0$, donc $\forall x \geqslant 4,\ g'(x) \geqslant 0$ ce qui implique que g est croissante sur $[4; +\infty[$. Comme $g(4) = \mathrm{e}^2 - 5 \geqslant 0$, on en déduit que g est positive sur $[4; +\infty[$ et donc que

$$\boxed{\forall x \geqslant 4, \qquad x \leqslant \mathrm{e}^{x/2} - 1.}$$

Par conséquent, pour tout $x \geqslant 4$, on a

$$F(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x/2} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^{x/2} - 1}{(\mathrm{e}^{x/2} - 1)(\mathrm{e}^{x/2} + 1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2} + 1} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2}} = \mathrm{e}^{-x/2},$$

donc

$$\boxed{\forall x \geqslant 4, \qquad F(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x/2}.}$$

Comme Φ est la primitive de F qui s'annule en 0, on peut écrire que

$$\Phi(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve immédiatement que Φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ puisque c'est l'intégrale de la fonction F qui est positive (positivité de l'intégrale). Par ailleurs, Φ étant continue sur le segment $[0;4]$, elle est bornée sur ce segment par une constante $M_1 \geqslant 0$, d'après un résultat du cours (théorème des bornes). Lorsque $x \geqslant 4$, on écrit que

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_4^x F(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_4^x \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x/2} - \mathrm{e}^{-2} \\
&\leqslant \underbrace{\int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + 1}_{=M_2}.
\end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on obtient que $\forall x \geqslant 0,\ 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant \max\{M_1; M_2\}$, ce qui démontre bien que

$$\boxed{\Phi \text{ est une fonction bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

b) *Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

La fonction Φ est bien évidemment dérivable puisque c'est une primitive et l'on a $\forall x \geqslant 0,\ \Phi'(x) = F(x) > 0$. Cela prouve que

$$\boxed{\Phi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

La fonction Φ étant croissante et bornée, on peut affirmer, en vertu du théorème de la limite monotone, que

$$\boxed{\Phi(x) \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

Partie III. *Dans cette partie, A désigne la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On admettra que $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n 1/k^2$.*

1. *Montrer que, pour tout t nombre réel et pour tout n entier naturel non nul, on a*

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t) + \cdots + \cos(nt)\big) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons la relation par récurrence sur $n \geqslant 1$ (on peut également utiliser les nombres complexes mais cela oblige à mettre à part les cas où $t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).
Initialisation : Pour $n = 1$, la relation est vérifiée puisque

$$\sin\left(\frac{2 \times 1 + 1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

en vertu de la formule $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}\cdot$

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons la relation vérifiée au rang n et démontrons la au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)+\cos\big((n+1)t\big)\big)\\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big)\\
&= \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)+2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big) \qquad \text{par hyp. de réc.}
\end{aligned}$$

Or, comme $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, on a

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big) = \sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right)-\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)+\cos\big((n+1)t\big)\big)\\
&= \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right)-\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\\
&= \sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la relation au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad \forall n\geqslant 1,\qquad 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big)=\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot}$$

2. *Montrer qu'il existe $a, b\in\mathbb{R}$ tels que $\forall k\geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\cdot$*

Soient $k\geqslant 1$ et $a, b\in\mathbb{R}$. En intégrant deux fois par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\left[(at+bt^2)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{=0\ (\text{car } \sin(k\pi)=0)} - \int_0^\pi (a+2bt)\frac{\sin(kt)}{k}\mathrm{d}t\\
&= -\left[(a+2bt)\frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2b\frac{-\cos(kt)}{k^2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{(-1)^k(a+2b\pi)-a}{k^2} - 2b\underbrace{\left[\frac{\sin(kt)}{k^3}\right]_0^\pi}_{=0}\\
&= \frac{(-1)^k(a+2b\pi)-a}{k^2}\cdot
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\left(\forall k\geqslant 1,\quad \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}\right) &\iff \left(\forall k\geqslant 1,\quad \frac{(-1)^k(a+2b\pi)-a}{k^2}=\frac{1}{k^2}\right)\\
&\iff \begin{cases} a+2b\pi=0\\ -a=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a=-1\\ b=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{avec } a=-1 \text{ et } b=\frac{1}{2\pi}, \text{ on a } \forall k\geqslant 1,\ \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^2}\cdot}$$

3. *On considère la fonction* $g : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\forall t \in]0;\pi]\,,\ g(t) = \dfrac{at+bt^2}{\sin(t/2)}$ *et* $g(0) = 2a$.

a) *Montrer que la fonction* g *est continue sur* $[0;\pi]$.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi]$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas. En particulier, g est continue sur $]0;\pi]$. Reste à étudier la continuité en 0. On a

$$at+bt^2 \underset{0^+}{\sim} at \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{2},$$

donc

$$g(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{at}{t/2} = 2a = g(0),$$

ce qui prouve la continuité de g en 0. En définitive,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0;\pi].}$$

b) *Montrer que la fonction* g *est dérivable sur* $]0;\pi]$ *et donner* $g'(t)$ *pour* $t \in]0;\pi]$.

Nous venons de justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi]$ donc

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0;\pi].}$$

Pour tout $t \in]0;\pi]$, on a

$$g'(t) = \frac{(a+2bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)(1/2)\cos(t/2)}{\big(\sin(t/2)\big)^2},$$

donc

$$\boxed{\forall t \in]0;\pi]\,, \qquad g'(t) = \frac{(2a+4bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)\cos(t/2)}{2\big(\sin(t/2)\big)^2}\cdot}$$

c) *Vérifier que* $g'(t)$ *admet une limite finie quand* t *tend vers* 0. *En déduire que* g *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0;\pi]$.

On a

$$\begin{aligned}
&(2a+4bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)\cos(t/2)\\
&= (2a+4bt)\left(\frac{t}{2} + o_{t\to 0^+}(t^2)\right) - (at+bt^2)\Big(1 + o_{t\to 0^+}(t)\Big)\\
&= bt^2 + o_{t\to 0^+}(t^2),
\end{aligned}$$

donc

$$(2a+4bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)\cos(t/2) \underset{0^+}{\sim} bt^2.$$

Par ailleurs, on a

$$2\big(\sin(t/2)\big)^2 \underset{0^+}{\sim} \frac{t^2}{2}\cdot$$

Par suite, on a

$$g'(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{bt^2}{t^2/2} \underset{0^+}{\sim} 2b,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{t\longrightarrow 0^+} g'(t) = 2b.}$$

La fonction g étant continue sur $[0;\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\pi]$ et admettant une limite finie (égale à $2b$) en 0, on peut affirmer, en vertu du théorème de la limite de la dérivée, que

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0;\pi] \text{ et } g'(0) = 2b = \frac{1}{\pi}\cdot}$$

4. *Montrer que, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, la suite $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Soit $h \in \mathcal{C}^1([0;\pi]\,;\mathbb{R})$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t &= \left[h(t)\frac{-\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi h'(t)\frac{-\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{h(0)}{n+1/2} + \int_0^\pi h'(t)\frac{\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi h'(t)\frac{\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^\pi |h'(t)|\frac{\big|\cos\big((n+1/2)t\big)\big|}{n+1/2}\mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire)}\\ &\leqslant \frac{\displaystyle\int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t}{n+1/2} \qquad \text{car } \big|\cos\big((n+1/2)t\big)\big| \leqslant 1,\end{aligned}$$

donc, puisque $\dfrac{\displaystyle\int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t}{n+1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi h'(t)\frac{\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t = 0.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{h(0)}{n+1/2} = 0.$$

En combinant ces résultats, on obtient finalement que

$$\boxed{\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

5. *Déduire des questions précédentes que $A = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$*

Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (bt^2+at)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après III. 2.}\\ &= \int_0^\pi (bt^2+at)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{par linéarité de l'intégrale.}\end{aligned}$$

Or, d'après la question III. 1., on a

$$\forall t \in\,]0;\pi]\,, \qquad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$

donc, pour tout $t \in\,]0;\pi]$

$$\begin{aligned}(bt^2+at)\sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{(bt^2+at)\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)} - \frac{bt^2+at}{2}\\ &= \frac{1}{2}g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{bt^2+at}{2}\end{aligned}$$

et l'on constate que cette relation est encore vraie en 0. Par suite, il vient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi (bt^2+at)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^\pi (bt^2+at)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{bt^3}{3}+\frac{at^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{b\pi^3}{3}+\frac{a\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3},$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Comme g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ d'après la question III. 3. c), on peut utiliser le résultat de la question III. 4. pour affirmer que

$$\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{A = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$