Correction de l'épreuve A

(durée : 3 h 30)

Partie I : Étude d'une famille d'équations

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $a < b < c$ *et* $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^*)^3$. *On considère, pour tout* $t \neq 0$, *l'équation* (E_t) *d'inconnue* λ *donnée par* $u^2/(\lambda - a) + v^2/(\lambda - b) + w^2/(\lambda - c) = 1/t$.

1. a) *Donner les variations de* $F : \lambda \longmapsto u^2/(\lambda-a)+v^2/(\lambda-b)+w^2/(\lambda-c)$. *En déduire que* F *prend la valeur* 0 *en deux points* ρ_1 *et* ρ_2 *vérifiant* $\rho_1 < \rho_2$. *Il est fortement conseillé de donner un tableau de variation et de justifier l'existence d'antécédents uniques par un énoncé clair du théorème de la bijection réciproque.*

La fonction F est clairement définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; a[\cup]a; b[\cup]b; c[\cup]c; +\infty[$. D'après les théorèmes généraux, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet ensemble et l'on a

$$\forall \lambda \in \mathscr{D}, \qquad F'(\lambda) = -\frac{u^2}{(\lambda - a)^2} - \frac{v^2}{(\lambda - b)^2} - \frac{w^2}{(\lambda - c)^2} < 0,$$

ce qui prouve que F est strictement décroissante sur $]-\infty; a[$, sur $]a; b[$, sur $]b; c[$ et sur $]c; +\infty[$. Les limites aux bornes des intervalles constituant $\mathscr{D}$ ne relevant d'aucune forme indéterminée, on dresse alors aisément le tableau des variations de F :

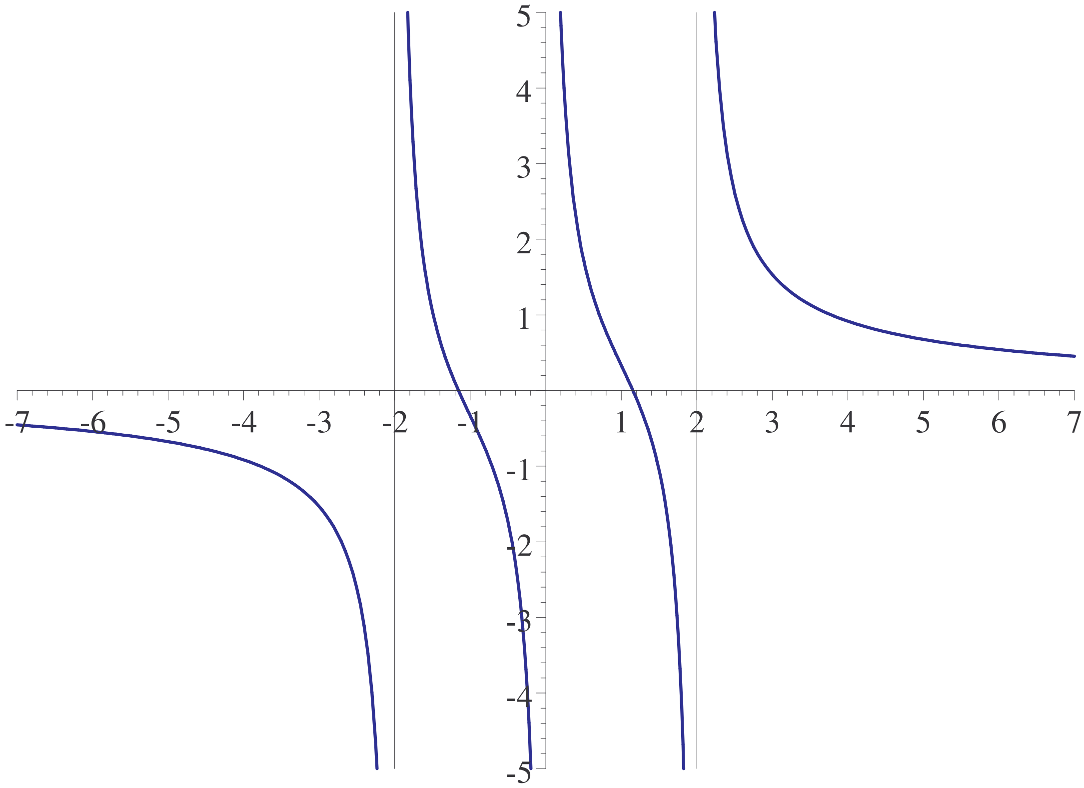
λ	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$F'(\lambda)$	$-$	‖ $-$	‖ $-$	‖ $-$	
$F(\lambda)$	$0 \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow -\infty$	‖ $+\infty \searrow 0$	

On constate donc que F est continue et strictement décroissante sur $]-\infty; a[$, ce qui prouve, en vertu du théorème de la bijection et du tableau de variation, que F réalise une bijection de $]-\infty; a[$ vers $]-\infty; 0[$. En particulier, F ne s'annule pas sur $]-\infty; a[$.
De même, F est continue et strictement décroissante sur $]a; b[$, ce qui prouve, en vertu des mêmes arguments, que F réalise une bijection de $]a; b[$ sur $\mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$ (si ! si !), on sait qu'il existe un unique nombre réel $\rho_1 \in]a; b[$ tel que $F(\rho_1) = 0$.
Pour les mêmes raisons, on constate que F réalise une bijection de $]b; c[$ vers $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence d'un unique nombre réel $\rho_2 \in]b; c[$ tel que $F(\rho_2) = 0$.
Enfin, les mêmes arguments nous permettent d'affirmer que F réalise une bijection de $]c; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$ et donc de dire que F ne s'annule pas sur $]c; +\infty[$.
En compilant ces résultats, on peut conclure que

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ s'annule en exactement deux points } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ vérifiant } a < \rho_1 < b < \rho_2 < c.}$$

b) *Tracer le graphe de F pour $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$ et $u = v = w = 1$.*

On nous demande le graphe de la fonction impaire $F : \lambda \longmapsto 1/(\lambda+2)+1/\lambda+1/(\lambda-2)$, ce qui donne



2. *Dans la suite, a, b et c sont quelconques et vérifient $a < b < c$.*

a) α] *Montrer que, pour tout $t \neq 0$, (E_t) admet trois racines $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.*

Supposons tout d'abord que $t > 0$. L'équation (E_t) s'écrit $F(\lambda) = 1/t$. Comme F réalise une bijection de $]-\infty; a[$ vers $]-\infty; 0[$, une autre bijection entre $]a; b[$ et $\mathbb{R}$, une troisième bijection de $]b; c[$ sur $\mathbb{R}$ et enfin une dernière bijection de $]c; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$ et comme $1/t$ est strictement positif, on peut affirmer que (E_t) admet exactement trois solutions : une solution $\lambda_1(t)$ dans $]a; b[$, une deuxième $\lambda_2(t)$ dans $]b; c[$ et la troisième et dernière $\lambda_3(t)$ dans $]c; +\infty[$.
Dans le cas où $t < 0$, un raisonnement similaire permet également d'affirmer l'existence de trois solutions $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ appartenant respectivement aux intervalles $]-\infty; a[$, $]a; b[$ et $]b; c[$.
En conclusion, on peut dire que,

pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, l'équation (E_t) admet trois solutions réelles distinctes $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ et $\lambda_3(t)$ telles que $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.

β] *Montrer que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs positives puis que $\lambda_1(t)$ tend vers a quand t tend vers 0 par valeurs négatives.*

On sait que, pour tout $t > 0$, on a $F\big(\lambda_1(t)\big) = 1/t$ et $\lambda_1(t) \in \,]a;b[$. Comme F réalise une bijection de $]a;b[$ vers $\mathbb{R}$, on peut introduire la réciproque de la restriction de F à l'intervalle $]a;b[$, c'est-à-dire la fonction $G_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \,]a;b[$ telle que $F \circ G_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $G_2 \circ F = \mathrm{Id}_{]a;b[}$. En appliquant la fonction G_2 aux deux membres de l'égalité $F\big(\lambda_1(t)\big) = 1/t$, on déduit alors que $\lambda_1(t) = G_2(1/t)$. Or $\lim_{\lambda \to a^+} F(\lambda) = +\infty$, donc $\lim_{\mu \to +\infty} G_2(\mu) = a$, ce qui implique que $\lim_{t \to 0^+} G_2(1/t) = a$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{t \to 0^+} \lambda_1(t) = a.}$$

Remarque : On peut aussi noter que, pour $t > 0$ suffisament petit, $a + tu^2 \in \,]a;b[$, donc $F(a + tu^2) = 1/t + v^2/(a + tu^2 - b) + w^2/(a + tu^2 - c) < 1/t = F\big(\lambda_1(t)\big)$, ce qui prouve, compte tenu du fait que F est strictement décroissante sur $]a;b[$, que $\lambda_1(t) < a + tu^2$. Ainsi, pour $t > 0$ suffisamment petit, on a $a < \lambda_1(t) < a + tu^2$, ce qui permet de retrouver le résultat à l'aide du théorème des gendarmes.

On sait que, pour tout $t < 0$, on a $F\big(\lambda_1(t)\big) = 1/t$ et $\lambda_1(t) \in \,]-\infty;a[$. Comme F réalise une bijection de $]-\infty;a[$ vers $]-\infty;0[$, on peut introduire la réciproque de la restriction de F à $]-\infty;a[$, c'est-à-dire la fonction $G_1 : \,]-\infty;0[\,\longrightarrow\,]-\infty;a[$ telle que $F \circ G_1 = \mathrm{Id}_{]-\infty;0[}$ et $G_1 \circ F = \mathrm{Id}_{]-\infty;a[}$. En appliquant la fonction G_1 aux deux membres de l'égalité $F\big(\lambda_1(t)\big) = 1/t$, on obtient alors $\lambda_1(t) = G_1(1/t)$. Or $\lim_{\lambda \to a^-} F(\lambda) = -\infty$, donc $\lim_{\mu \to -\infty} G_1(\mu) = a$, ce qui donne $\lim_{t \to 0^-} G_1(1/t) = a$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{t \to 0^-} \lambda_1(t) = a.}$$

Remarque et notation : On admettra que les deux fonctions λ_2 et λ_3 admettent également des limites en 0, respectivement b et c. On notera encore λ_1, λ_2 et λ_3 les fonctions prolongées par $\lambda_1(0) = a$, $\lambda_2(0) = b$, $\lambda_3(0) = c$.

b) *Continuité et dérivabilité*

α] *Montrer que les fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 sont continues sur $\mathbb{R}$.*

Nous avons vu que F réalise une bijection de $]-\infty;a[$ vers $]-\infty;0[$, une autre bijection de $]a;b[$ vers $\mathbb{R}$, une troisième bijection de $]b;c[$ vers $\mathbb{R}$ et enfin une dernière bijection de $]c;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$. Notons $G_1 : \,]-\infty;0[\,\longrightarrow\,]-\infty;a[$, $G_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \,]a;b[$, $G_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \,]b;c[$ et $G_4 : \,]0;+\infty[\,\longrightarrow\,]c;+\infty[$ les réciproques respectives. Précisons également que G_1, G_2, G_3 et G_4 sont toutes les quatre continues sur leurs ensembles de définition en tant que réciproques de fonctions continues (résultat du cours).

On sait que, pour tout $t > 0$, on a $F\big(\lambda_1(t)\big) = 1/t$ et $\lambda_1(t) \in \,]a;b[$ et, pour tout $t < 0$, on a $F\big(\lambda_1(t)\big) = 1/t$ et $\lambda_1(t) \in \,]-\infty;a[$. Par suite, on a

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} G_1(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_2(1/t) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

ce qui prouve que λ_1 est continue sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux de continuité (composition de fonctions continues). Comme λ_1 a été prolongée par continuité en 0 en posant $\lambda_1(0) = \lim_{t \to 0} \lambda_1(t) = a$, on peut en déduire que

$$\boxed{\lambda_1 \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

On obtient de même que

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} G_2(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_3(1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lambda_3(t) = \begin{cases} G_3(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_4(1/t) & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

ce qui justifie que λ_2 et λ_3 sont continues sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux. Comme λ_2 et λ_3 ont été prolongées par continuité en 0, on en déduit que

$$\boxed{\lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ sont continues sur } \mathbb{R}.}$$

β] *En utilisant l'égalité* (E_t) *pour* $\lambda = \lambda_1(t)$, *montrer que* $\big(\lambda_1(t) - a\big)/t$ *tend vers* u^2 *quand* t *tend vers* 0. *En déduire que* λ_1 *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$. En écrivant (E_t) pour $\lambda = \lambda_1(t)$, on a

$$\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a} + \frac{v^2}{\lambda_1(t) - b} + \frac{w^2}{\lambda_1(t) - c} = \frac{1}{t}\cdot$$

Or, lorsque t tend vers 0, on sait que $\lambda_1(t)$ tend vers a, donc

$$\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a} + \frac{v^2}{\lambda_1(t) - b} + \frac{w^2}{\lambda_1(t) - c} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{u^2}{\lambda_1(t) - a}$$

Par suite,

$$\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\lambda_1(t) - a}{t} \underset{t\to 0}{\sim} u^2.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\lambda_1(t) - a}{t} = u^2.}$$

Nous avons vu à la question précédente que

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} G_1(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_2(1/t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Or la fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty; a[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle donc, d'après un résultat du cours, la régularité de F se transmet à sa bijection réciproque sur cet intervalle, ce qui signifie que G_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty; 0[$. De même, on constate que G_2 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après les théorèmes généraux de dérivabilité (composition de fonctions dérivables), λ_1 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, la limite déterminée ci-dessus peut se réécrire sous la forme

$$\lim_{t\to 0} \frac{\lambda_1(t) - \lambda_1(0)}{t - 0} = u^2,$$

ce qui prouve que λ_1 est dérivable en 0 et $\lambda_1'(0) = u^2$. En définitive,

$$\boxed{\lambda_1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ avec, en particulier, } \lambda_1'(0) = u^2.}$$

γ] *Montrer de même que* λ_2 *et* λ_3 *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *Donner* $\lambda_2'(0)$ *et* $\lambda_3'(0)$.

En procédant *mutatis mutandis* comme à la question précédente, on démontre que

$$\boxed{\lambda_2 \text{ et } \lambda_3 \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R} \text{ avec, en particulier, } \lambda_2'(0) = v^2 \text{ et } \lambda_3'(0) = w^2.}$$

c) *Étude des fonctions à l'infini*

α] *Déterminer les limites éventuelles des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 lorsque t tend vers $+\infty$, puis lorsque t tend vers $-\infty$. Résumer les résultats sous forme d'un tableau à deux entrées.*

Nous avons vu que

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} G_1(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_2(1/t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Comme $\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = 0^-$, on en déduit que $\lim_{\mu\to 0^-} G_1(\mu) = -\infty$ et donc $\lim_{t\to-\infty} G_1(1/t) = -\infty$, c'est-à-dire $\lim_{t\to-\infty} \lambda_1(t) = -\infty$. Par ailleurs, comme $F(\rho_1) = 0$ avec $\rho_1 \in]a; b[$, on sait que $G_2(0) = \rho_1$ donc $\lim_{t\to+\infty} G_2(1/t) = G_2(0) = \rho_1$, c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} \lambda_1(t) = \rho_1$.
Nous savons également que

$$\lambda_2(t) = \begin{cases} G_2(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_3(1/t) & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Par suite, $\lim_{t\to-\infty} \lambda_2(t) = \lim_{t\to-\infty} G_2(1/t) = G_2(0) = \rho_1$ par continuité de G_2 en 0. De plus, comme $F(\rho_2) = 0$ avec $\rho_2 \in]b; c[$, on sait que $G_3(0) = \rho_2$ donc $\lim_{t\to+\infty} G_3(1/t) = G_3(0) = \rho_2$, c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} \lambda_2(t) = \rho_2$.
Enfin, on a

$$\lambda_3(t) = \begin{cases} G_3(1/t) & \text{si } t < 0, \\ G_4(1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

donc $\lim_{t\to-\infty} \lambda_3(t) = \lim_{t\to-\infty} G_3(1/t) = G_3(0) = \rho_2$ par continuité de G_3 en 0. Comme par ailleurs, $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0^+$, on a $\lim_{\mu\to 0^+} G_4(\mu) = +\infty$ et donc $\lim_{t\to+\infty} G_4(1/t) = +\infty$, ce qui prouve que $\lim_{t\to+\infty} \lambda_3(t) = +\infty$.
En résumé, on a

	limite de λ_1	limite de λ_2	limite de λ_3
en $-\infty$	$-\infty$	ρ_1	ρ_2
en $+\infty$	ρ_1	ρ_2	$+\infty$

β] *Exprimer $u^2/\big(\lambda_1(t) - a\big)$ à l'aide de $1/\lambda_1(t)$, $1/\lambda_1(t)^2$ et d'une fonction négligeable devant $1/\lambda_1(t)^2$ quand t tend vers $-\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à la fonction λ_1 en $-\infty$. Qu'en est-il pour la fonction λ_3 en $+\infty$?*

Comme $\lim_{t\to-\infty} \lambda_1(t) = -\infty$, on peut considérer $1/\lambda_1(t)$ comme un infiniment petit au voisinage de $-\infty$ et écrire, d'après la formule donnant le développement limité usuel de $1/(1-y)$ lorsque y tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\lambda_1(t) - a} &= \frac{u^2}{\lambda_1(t)} \frac{1}{1 - \dfrac{a}{\lambda_1(t)}} \\ &= \frac{u^2}{\lambda_1(t)} \left\{ 1 + \frac{a}{\lambda_1(t)} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)}\Big) \right\} \\ &= \frac{u^2}{\lambda_1(t)} + \frac{au^2}{\lambda_1(t)^2} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\Big), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\boxed{\frac{u^2}{\lambda_1(t) - a} = \frac{u^2}{\lambda_1(t)} + \frac{au^2}{\lambda_1(t)^2} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\Big).}$$

On démontrerait de même que

$$\frac{v^2}{\lambda_1(t)-b} = \frac{v^2}{\lambda_1(t)} + \frac{bv^2}{\lambda_1(t)^2} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\Big)$$

et

$$\frac{w^2}{\lambda_1(t)-c} = \frac{w^2}{\lambda_1(t)} + \frac{cw^2}{\lambda_1(t)^2} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\Big).$$

Or, comme $\lambda_1(t)$ est une solution de (E_t) pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{u^2}{\lambda_1(t)-a} + \frac{v^2}{\lambda_1(t)-b} + \frac{w^2}{\lambda_1(t)-c} = \frac{1}{t},$$

donc

$$(*) \qquad \frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda_1(t)} + \frac{au^2+bv^2+cw^2}{\lambda_1(t)^2} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{1}{\lambda_1(t)^2}\Big) = \frac{1}{t}\cdot$$

Si l'on tronque cette formule à l'ordre 1, il vient

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{\lambda_1(t)} \underset{t\to-\infty}{\sim} \frac{1}{t} \qquad \text{ou encore} \qquad \lambda_1(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} (u^2+v^2+w^2)t.$$

Dès lors, si l'on réutilise la formule $(*)$, il vient

$$\lambda_1(t) - (u^2+v^2+w^2)t = \frac{(au^2+bv^2+cw^2)t}{\lambda_1(t)} + o_{t\to-\infty}\Big(\frac{t}{\lambda_1(t)}\Big),$$

ce qui prouve que

$$\lim_{t\to-\infty}\{\lambda_1(t) - (u^2+v^2+w^2)t\} = \frac{au^2+bv^2+cw^2}{u^2+v^2+w^2}\cdot$$

On en déduit alors que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la fonction } \lambda_1 \text{ admet en } -\infty \text{ une asymptote oblique} \\ \text{d'équation } y = (u^2+v^2+w^2)t + \dfrac{au^2+bv^2+cw^2}{u^2+v^2+w^2}\cdot\end{array}}$$

En procédant de même avec la fonction λ_3 en $+\infty$, on obtient que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la fonction } \lambda_3 \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote oblique} \\ \text{d'équation } y = (u^2+v^2+w^2)t + \dfrac{au^2+bv^2+cw^2}{u^2+v^2+w^2}\cdot\end{array}}$$

γ] *Dresser le tableau de variation des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3. Tracer sur une même feuille les graphes de ces fonctions sous les hypothèses de la question 1. b)*

Nous avons vu que

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} G_1(1/t) & \text{si } t<0, \\ G_2(1/t) & \text{si } t>0 \end{cases} \qquad \lambda_2(t) = \begin{cases} G_2(1/t) & \text{si } t<0, \\ G_3(1/t) & \text{si } t>0 \end{cases}$$

et

$$\lambda_3(t) = \begin{cases} G_3(1/t) & \text{si } t<0, \\ G_4(1/t) & \text{si } t>0. \end{cases}$$

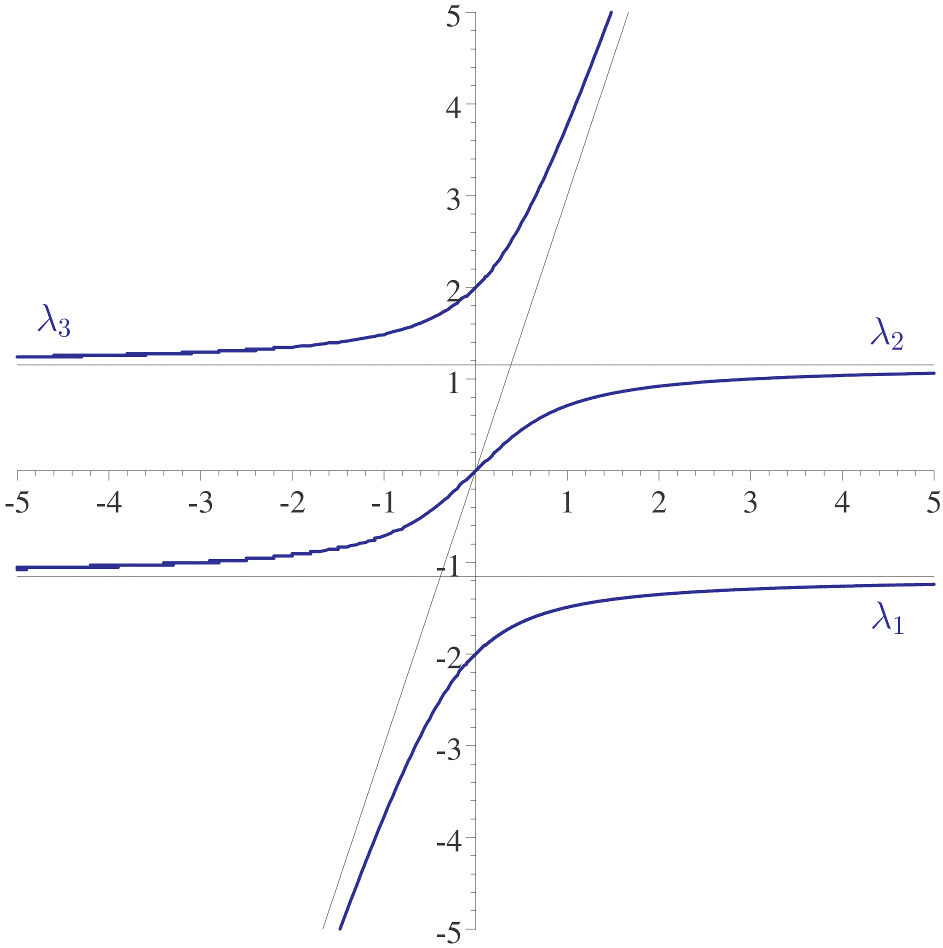
Or G_1, G_2, G_3 et G_4 sont toutes les quatre strictement décroissantes respectivement sur $]-\infty;0[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$ en tant que réciproques de fonctions strictement décroissantes (c'est un résultat du cours). Comme la fonction $t \longmapsto 1/t$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, chacune des fonctions λ_1, λ_2 et λ_3 est la composée de deux fonctions strictement décroissantes sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et est donc, à ce titre, une fonction strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Comme elles se prolongent toutes les trois par continuité en 0, on en déduit que λ_1, λ_2 et λ_3 sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des renseignements glanés jusqu'ici nous permet alors de dresser les tableaux de variation suivants :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lambda_1(t)$	$-\infty$	$\nearrow a$	ρ_1

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lambda_2(t)$	ρ_1	$\nearrow b$	ρ_2

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lambda_3(t)$	ρ_2	$\nearrow c$	$+\infty$

On obtient les graphes suivants :



Partie II : Étude de matrices

Dans la suite du problème, si M est une matrice, ${}^tM$ désigne sa transposée. Si $U = {}^t\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, U^tU est la matrice $\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$. Si M est une matrice carrée et λ une valeur propre de M, on note E_λ^M le sous-espace propre correspondant. Enfin, pour tout n entier naturel, I_n désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. *Donner l'image et le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$*

   Soit f l'application linéaire canoniquement associée à B. Déterminons le rang de B en appliquant la méthode du pivot (les pivots sont encadrés) :

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

   On en déduit que $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle. Comme les vecteurs colonnes de B engendrent l'image de f, on obtient une base de $\operatorname{Im} f$ en ne conservant qu'un seul des trois vecteurs colonnes. Donc

$$\boxed{\operatorname{Im} f \text{ est une droite vectorielle dirigée par le vecteur } (1,2,3).}$$

   Pour déterminer le noyau de f, on recherche les vecteurs $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ tels que $f(\overrightarrow{u}) = 0$, c'est-à-dire ceux vérifiant la relation matricielle $BX = 0$ où $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Or, d'après la réduction de Gauß effectuée ci-dessus, cette relation est équivalente à l'équation

$$\boxed{x} \quad +2y \quad +3z \quad = 0$$

   dont les solutions sont obtenues en paramétrant par y et z, d'où

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & -2\lambda & -3\mu \\ y & = & \lambda & \\ z & = & & \mu \end{array}\right. \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

   Ainsi

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ est un plan vectoriel dont une base est } \big((-2,1,0);(-3,0,1)\big).}$$

   Remarque du correcteur : J'ai priviligié la méthode classique de recherche de l'image et du noyau que nos étudiants connaissent bien. Ici, on pouvait bien sûr remarquer que les trois colonnes C_1, C_2 et C_3 de la matrice vérifient $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = 3C_1$, ce qui redonne immédiatement les résultats ci-dessus.

2. *Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. On note $U = {}^t\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ et l'on pose $T = U^tU$.*

   a) *Déterminer le rang de T. On distinguera selon que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou non.*

      Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, alors $T = 0$ et T est de rang 0. Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, alors les trois colonnes de la matrice U^tU sont proportionnelles au vecteur non nul (u, v, w), donc T est de rang 1. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}, \text{ alors } \operatorname{rg} T = 0 \text{ et si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}, \text{ alors } \operatorname{rg} T = 1.}$$

b) *Montrer que T^2 est proportionnelle à T.*

On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}}_{=T} \overbrace{\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}}^{=T} \underbrace{(u^2+v^2+w^2)\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}}_{=T^2}$$

donc

$$\boxed{T^2 = (u^2+v^2+w^2)T.}$$

c) *Déterminer les sous-espaces propres de T. Cette matrice est-elle diagonalisable ?*

Supposons que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Alors $T = 0$, ce qui prouve que le seul sous-espace propre de T est $E_0^T = \mathbb{R}^3$. Dans ce cas, la matrice est diagonalisable (pardi ! elle est diagonale).

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\text{, alors } T = 0 \text{ admet } 0 \text{ comme seule valeur propre} \\ \text{et l'on a } E_0^T = \mathbb{R}^3\text{. La matrice } T \text{ est diagonalisable.} \end{array}}$$

Supposons que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$

On sait que $\operatorname{rg} T = 1$, ce qui prouve que $\dim \operatorname{Ker} T = 2$ (théorème du rang) et donc que le sous-espace propre E_0^T est de dimension 2. Or

$$T\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ 0 \\ -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ w \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ w \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc les vecteurs $(v,-u,0)$, $(w,0,-u)$ et $(0,w,-v)$ appartiennent au noyau. Notons que, puisque u, v et w ne sont pas tous nuls, il y a au moins deux vecteurs parmi ces trois qui sont linéairement indépendants. Par suite, E_0^T est un plan dont une base est constituée de deux vecteurs non nuls choisis parmi $(v,-u,0)$, $(w,0,-u)$ et $(0,w,-v)$.
Par ailleurs, la relation $T^2 = (u^2+v^2+w^2)T$ montre que chacune des trois colonnes de T est un vecteur propre de T pour la valeur propre $u^2+v^2+w^2$ (à condition que la colonne ne soit pas nulle évidemment). Comme chacune de ces trois colonnes est manifestement proportionnelle au vecteur (u,v,w) et que ce vecteur est non nul (puisque $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$), on peut en déduire que $(u,v,w) \in E^T_{u^2+v^2+w^2}$.Comme nous avons déjà trouvé un sous-espace propre de dimension 2 et que la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser 3 (= la dimension de $\mathbb{R}^3$), on en déduit que $E^T_{u^2+v^2+w^2}$ est nécessairement de dimension 1 et donc que c'est la droite engendrée par le vecteur (u,v,w).
On constate alors que la somme des dimensions des sous-espaces propres de T est égale à 3, c'est-à-dire la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc T est diagonalisable (ce qui n'a rien d'étonnant pour une matrice symétrique réelle).

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ alors } T \text{ admet } 0 \text{ et } u^2+v^2+w^2 \text{ comme valeurs propres.} \\ \text{Le sous-espace propre } E_0^T \text{ est un plan dont une base est constituée de deux} \\ \text{vecteurs non nuls choisis parmi } (v,-u,0),\ (w,0,-u) \text{ et } (0,w,-v). \\ \text{Le sous-espace propre } E^T_{u^2+v^2+w^2} \text{ est la droite dirigée par le vecteur } (u,v,w). \\ \text{La matrice } T \text{ est diagonalisable.} \end{array}}$$

3. *Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et on pose* $V = \begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}$.

   a) *Déterminer le rang de V.*

   Comme $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on sait que u, v et w ne sont pas simultanément nuls. On traite le cas où $u \neq 0$, les deux autres étant similaires. Pour calculer le rang de V, on applique la méthode du pivot (en encadrant les pivots), ce qui donne :

$$\operatorname{rg} V = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & \boxed{u} \\ v & -u & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -vw & uw & 0 \\ -w & 0 & \boxed{u} \\ v & \boxed{-u} & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & \boxed{u} \\ v & \boxed{-u} & 0 \end{pmatrix},$$

   donc

$$\boxed{\operatorname{rg} V = 2.}$$

   b) *Montrer que 0 est la seule valeur propre réelle de V.*

   On propose deux solutions. La première est élégante mais complètement hors de l'esprit du programme de BCPST. La seconde est technique.

   <u>Première méthode : Utilisation du caractère antisymétrique de V</u>
   Soient λ une valeur propre réelle de V et $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ un vecteur propre réel associé à λ. On constate que V est antisymétrique, ce qui permet de calculer le produit ${}^tXVX$ des deux manières suivantes :

$${}^tXVX = {}^tX\lambda X = \lambda {}^tXX = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

$${}^tXVX = -{}^tX{}^tVX = -{}^t(VX)X = -{}^t(\lambda X)X = -\lambda {}^tXX = -\lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

   Ainsi, comme $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, on en déduit que $\lambda = -\lambda$, c'est-à-dire $\lambda = 0$.

   <u>Seconde méthode :</u>
   Comme $\operatorname{rg} V = 2$, la matrice V admet bien 0 comme valeur propre. Pour montrer que c'est la seule valeur propre réelle, nous allons prouver que si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $\operatorname{rg}(V - \lambda I_3) = 3$. Pour cela, on suppose que $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et l'on applique la méthode du pivot à $V - \lambda I_3$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(V - \lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & w & -v \\ -w & -\lambda & u \\ v & -u & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & w & -v \\ 0 & \boxed{\lambda^2 + w^2} & -\lambda u - vw \\ 0 & \lambda u - vw & \lambda^2 + v^2 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-\lambda} & w & -v \\ 0 & \boxed{\lambda^2 + w^2} & -\lambda u - vw \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda^2(\lambda^2 + u^2 + v^2 + w^2)} \end{pmatrix} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

   En conclusion,

$$\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre réelle de } V.}$$

   c) *La matrice V est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*

   Comme $\operatorname{rg} V = 2$, on sait que $\dim \operatorname{Ker} V = 1$ (théorème du rang), donc E_0^V est de dimension 1. Comme c'est le seul sous-espace propre réel de V, la somme des dimensions des sous-espaces propres réels de V n'est pas égale à la dimension de $\mathbb{R}^3$, donc

$$\boxed{V \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

   On peut aussi raisonner par l'absurde : si V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors, comme 0 est la seule valeur propre réelle de V, cela signifie que V est semblable à la matrice nulle et donc que $V = 0$ (car la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même) : absurde !

4. a) *Calculer les matrices* $S = {}^tVV$ *et* $\Omega = (u^2+v^2+w^2)I_3 - S$.

On a

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}}^{=V} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix}}_{={}^tV} & \underbrace{\begin{pmatrix} w^2+v^2 & -vu & -wu \\ -vu & w^2+u^2 & -wv \\ -wu & -wv & v^2+u^2 \end{pmatrix}}_{={}^tVV} \end{array}$$

donc

$$\boxed{S = \begin{pmatrix} w^2+v^2 & -vu & -wu \\ -vu & w^2+u^2 & -wv \\ -wu & -wv & v^2+u^2 \end{pmatrix}.}$$

D'où

$$(u^2+v^2+w^2)I_3 - S = \begin{pmatrix} u^2 & vu & wu \\ vu & v^2 & wv \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Omega = T.}$$

b) *La matrice* S *est-elle diagonalisable ?*

<u>Première méthode :</u>
D'après la question précédente, on a $S = (u^2+v^2+w^2)I_3 - T$. Or nous avons vu que T est diagonalisable, ce qui justifie l'existence d'une matrice inversible P et d'une matrice diagonale D telles que $T = PDP^{-1}$. Alors, on a $S = (u^2+v^2+w^2)I_3 - PDP^{-1} = (u^2+v^2+w^2)PP^{-1} - PDP^{-1} = P\big((u^2+v^2+w^2)I_3 - D\big)P^{-1}$, ce qui signifie que la matrice S est semblable à la matrice $(u^2+v^2+w^2)I_3 - D$ qui est diagonale en tant que somme de deux matrices diagonales.
<u>Seconde méthode :</u>
Il suffit de remarquer que la matrice S est symétrique réelle et d'utiliser le théorème du cours qui affirme qu'une telle matrice est nécessairement diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
<u>Bilan :</u>

$$\boxed{S \text{ est diagonalisable.}}$$

c) *En utilisant le fait que les valeurs propres de* S *s'obtiennent à l'aide des valeurs propres de* T*, déterminer les sous-espaces propres de* S.

La relation $S = (u^2+v^2+w^2)I_3 - T$ montre que X est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de S pour la valeur propre $u^2+v^2+w^2-\lambda$. Autrement dit, on a $E^T_\lambda = E^S_{u^2+v^2+w^2-\lambda}$. En tenant compte des résultats de la question II. 2. c), on en déduit alors que :

La matrice S admet 0 et $u^2+v^2+w^2$ comme valeurs propres.
Le sous-espace propre E^S_0 est la droite dirigée par le vecteur (u,v,w).
Le sous-espace propre $E^S_{u^2+v^2+w^2}$ est un plan dont une base est constituée de deux vecteurs non nuls choisis parmi $(v,-u,0)$, $(w,0,-u)$ et $(0,w,-v)$.

Partie III : Spectre d'une matrice perturbée

Soit $\overrightarrow{u} = (u, v, w) \in (\mathbb{R}^*)^3$ un vecteur. On note de même qu'au II : $U = {}^t\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ et $T = U{}^tU$. Soient a, b, c trois réels, on note D la matrice $D = \mathrm{Diag}(a, b, c)$. Enfin, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $D(t) = D + tT$.

1. *On suppose dans cette question que $a = b = c$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs propres de $D(t)$? Quels sont les sous-espaces propres associés ?*

   Puisque $a = b = c$, on a $D = aI_3$ et donc $D(t) = aI_3 + tT$.
   Si $t = 0$, alors $D(0) = aI_3$ donc

   $$\boxed{a \text{ est la seule valeur propre de } D(0) \text{ et l'espace propre associé est } E_a^{D(0)} = \mathbb{R}^3.}$$

   Si $t \neq 0$, la relation $D(t) = aI_3 + tT$ montre que X est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ si, et seulement si, X est un vecteur propre de $D(t)$ associé à la valeur propre $a + t\lambda$. Ainsi, on a $E_{a+t\lambda}^{D(t)} = E_\lambda^T$. En tenant compte des résultat de la question II. 2. c), on en déduit alors que :

   $$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } t \neq 0, \text{ la matrice } D(t) \text{ admet } a \text{ et } a + t(u^2 + v^2 + w^2) \text{ comme valeurs propres.} \\ \text{Le sous-espace propre } E_a^{D(t)} \text{ est un plan dont une base est constituée de deux} \\ \text{vecteurs non nuls choisis parmi } (v, -u, 0),\ (w, 0, -u) \text{ et } (0, w, -v). \\ \text{Le sous-espace propre } E_{a+t(u^2+v^2+w^2)}^T \text{ est la droite dirigée par le vecteur } (u, v, w). \end{array}}$$

2. *Retour au cas général. On considère $t \in \mathbb{R}^*$* et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \notin \{a, b, c\}$.

   a) *On suppose que λ est une valeur propre de $D(t)$. On note X un vecteur propre de $D(t)$ pour la valeur propre λ.*

   α] *Montrer que $(\lambda I_3 - D)X = t\,U{}^tUX$ et ${}^tUX = t\,{}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U({}^tUX)$.*
   On sait que $D(t)X = \lambda X$ donc

   $$\begin{aligned} (\lambda I_3 - D)X &= \lambda X - DX \\ &= \lambda X - (D + tT)X + tTX \\ &= \lambda X - D(t)X + tTX \\ &= tTX \qquad \text{car } D(t)X = \lambda X, \end{aligned}$$

   et comme $T = U{}^tU$, on a bien

   $$\boxed{(\lambda I_3 - D)X = t\,U{}^tUX.}$$

   Comme $\lambda \notin \{a, b, c\}$ et comme a, b, c sont les valeurs propres de D, on en déduit que la matrice $\lambda I_3 - D$ est bien inversible, ce qui permet de considérer la matrice $(\lambda I_3 - D)^{-1}$ et de calculer

   $$\begin{aligned} t\,{}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U({}^tUX) &= {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}(t\,U{}^tUX) \\ &= {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}(\lambda I_3 - D)X \qquad \text{formule ci-dessus} \\ &= {}^tUX, \end{aligned}$$

   donc

   $$\boxed{{}^tUX = t\,{}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U({}^tUX).}$$

β] *Montrer que ${}^tUX \neq 0$ et en déduire que λ vérifie l'équation ${}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = 1/t$.*
Raisonnons par l'absurde en supposant que ${}^tUX = 0$. Alors, en multipliant par U, il vient $TX = 0$ et donc $D(t)X = (D + tT)X = DX$, ce qui nous donne $DX = \lambda X$ (puisque $D(t)X = \lambda X$). Comme $X \neq 0$, on en déduit que λ est une valeur propre de D et comme les valeurs propres de D sont a, b et c, il s'ensuit que $\lambda \in \{a, b, c\}$: absurde ! Donc

$$\boxed{{}^tUX \neq 0.}$$

Remarquons que la matrice ${}^tUX$ est de format 1×1, autrement dit que c'est un nombre réel !! Si on note μ ce nombre alors l'expression démontrée à la question précédente devient $\mu = \mu t\, {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U$, et comme $\mu \neq 0$ et $t \neq 0$, on peut simplifier par μ et diviser par t pour obtenir

$$\boxed{{}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = \frac{1}{t}\cdot}$$

γ] *Montrer que si λ satisfait à l'équation ${}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = 1/t$ alors il vérifie l'équation (E_t) définie dans la partie I.*
On a

$$\begin{aligned}
{}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U &= \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda - b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \qquad \text{car } \lambda \notin \{a, b, c\} \\
&= \frac{u^2}{\lambda - a} + \frac{v^2}{\lambda - b} + \frac{w^2}{\lambda - c},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{l'équation } {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = 1/t \text{ est équivalente à l'équation } (E_t).}$$

b) *Étudier la réciproque et montrer que λ est valeur propre de $D(t)$ si, et seulement si, il vérifie (E_t).*
Dans la question a), nous avons démontré que si λ est une valeur propre de $D(t)$ alors λ est une solution de (E_t).
Supposons réciproquement que λ est une solution de (E_t). Alors, d'après la question précédente, on a ${}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = 1/t$. En multipliant cette relation par U à gauche, on obtient $U\, {}^tU(\lambda I_3 - D)^{-1}U = (1/t)U$, c'est-à-dire

$$\big(t\,T(\lambda I_3 - D)^{-1}\big)U = U.$$

Comme $U \neq 0$, cette relation signifie que U est un vecteur propre de la matrice de $t\,T(\lambda I_3 - D)^{-1}$ associé à la valeur propre 1. Par suite, on a

$$\operatorname{rg}\big(t\,T(\lambda I_3 - D)^{-1} - I_3\big) < 3.$$

Comme la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang, on peut multiplier par $\lambda I_3 - D$, ce qui donne

$$\operatorname{rg}\big(t\,T - (\lambda I_3 - D)\big) < 3$$

ou encore

$$\operatorname{rg}\big(D(t) - \lambda I_3\big) < 3,$$

ce qui signifie que λ est une valeur propre de $D(t)$.
En conclusion,

$$\boxed{\text{le nombre } \lambda \notin \{a, b, c\} \text{ est valeur propre de } D(t) \text{ si, et seulement si, il vérifie } (E_t).}$$

3. *Dans cette question, on considère $t \in \mathbb{R}^*$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$. Rappeler les résultats obtenus dans la partie I quant aux solutions de l'équation (E_t).*

Comment répondre à une telle question sinon en répétant tous les résultats obtenus dans la partie I ?!? On retiendra essentiellement que l'équation (E_t) admet trois solutions distinctes $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$ et que ces solutions sont toutes distinctes de a, b et c.

a) *Montrer que $D(t)$ est diagonalisable.*

Première méthode :
Nous avons démontré, dans la question 2, que le spectre de $D(t)$ contient l'ensemble des solutions de (E_t). Comme cette équation admet trois solutions distinctes (nous venons de le rappeler), on en déduit que $D(t)$ admet trois valeurs propres distinctes. Cela suffit pour affirmer que $D(t)$ est diagonalisable.
Seconde méthode :
On peut déduire que $D(t)$ est diagonalisable du fait que c'est une matrice symétrique réelle. L'hypothèse $a < b < c$ n'est alors même pas nécessaire !
Bilan :

$$\boxed{D(t) \text{ est diagonalisable.}}$$

b) *Soit $i \in \{1; 2; 3\}$. Montrer que le vecteur $\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U$ est propre pour $D(t)$.*

Comme $\lambda_i(t) \notin \{a, b, c\}$, la matrice $\lambda_i(t)I_3 - D$ est inversible et $\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U$ est donc bien définie.
De plus, le fait que $U \neq 0$ implique que $\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U \neq 0$.
Par ailleurs, comme $\lambda_i(t)$ est une solution de (E_t), la question 2. a) γ] nous dit que ${}^tU\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U = 1/t$. Par suite, on a

$$\begin{aligned} D(t)\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U &= D\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U + tU{}^tU\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U \\ &= D\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U + U, \end{aligned}$$

ce qui donne, en introduisant artificiellement le produit $\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}$ (ce qui est indolore puisqu'il vaut I_3),

$$\begin{aligned} D(t)\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U &= D\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U + \big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U \\ &= \big(D + \lambda_i(t)I_3 - D\big)\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U \\ &= \lambda_i(t)\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U. \end{aligned}$$

On a donc réuni tous les éléments nécessaires pour affirmer que,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout } i \in \{1; 2; 3\}, \text{ le vecteur } \big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U \text{ est un} \\ \text{vecteur propre de } D(t) \text{ associé à la valeur propre } \lambda_i(t).\end{array}}$$

c) *En déduire une base de vecteurs propres de $D(t)$.*

Il résulte de a) et b) que $\Big\{\big(\lambda_1(t)I_3 - D\big)^{-1}U, \big(\lambda_2(t)I_3 - D\big)^{-1}U, \big(\lambda_3(t)I_3 - D\big)^{-1}U\Big\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de $D(t)$. Or, pour $i \in \{1; 2; 3\}$, on a

$$\big(\lambda_i(t)I_3 - D\big)^{-1}U = \begin{pmatrix} \lambda_i(t) - a & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i(t) - b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i(t) - c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{\lambda_i(t) - a} \\ \dfrac{v}{\lambda_i(t) - b} \\ \dfrac{w}{\lambda_i(t) - c} \end{pmatrix},$$

donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les vecteurs } \left(\dfrac{u}{\lambda_1(t) - a}, \dfrac{v}{\lambda_1(t) - b}, \dfrac{w}{\lambda_1(t) - c}\right), \left(\dfrac{u}{\lambda_2(t) - a}, \dfrac{v}{\lambda_2(t) - b}, \dfrac{w}{\lambda_2(t) - c}\right) \text{ et} \\ \left(\dfrac{u}{\lambda_3(t) - a}, \dfrac{v}{\lambda_3(t) - b}, \dfrac{w}{\lambda_3(t) - c}\right) \text{ forment une base de vecteurs propres de } D(t).\end{array}}$$

4. *Dans cette question, on considère $t \in \mathbb{R}^*$ et on suppose que $a = b$* et *$a \neq c$.*

a) *Montrer que la matrice $D(t)$ admet trois valeurs propres réelles.*

Nous avons démontré, dans la question 2, que les valeurs propres de $D(t)$ sont à rechercher parmi a, b, c et parmi les solutions de (E_t).
Lorsque $a = b$ et $c \neq a$, l'équation (E_t) s'écrit

$$\frac{u^2 + v^2}{\lambda - a} + \frac{w^2}{\lambda - c} = \frac{1}{t}\cdot$$

En procédant comme dans la partie I, on dresse le tableau de variation de la fonction $F : \lambda \longmapsto (u^2 + v^2)/(\lambda - a) + w^2/(\lambda - c)$, ce qui donne (dans le cas où $c > a$, l'autre cas étant similaire) :

λ	$-\infty$		a		c		$+\infty$
$F'(\lambda)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$F(\lambda)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Les variations de cette fonction associées au théorème de la bijection permettent alors de constater que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, l'équation (E_t) admet deux solutions réelles distinctes : l'une dans $]-\infty; a[$ et l'autre dans $]a; c[$ lorsque $t < 0$, et l'une dans $]a; c[$ et l'autre dans $]c; +\infty[$ lorsque $t > 0$. Cela fournit deux valeurs propres distinctes (et différentes de a et c) pour la matrice $D(t)$.
Reste donc à rechercher une éventuelle troisième valeur propre réelle de $D(t)$ parmi a et c. La question suivante nous laisse soupçonner que a est un bon candidat. Or, comme le vecteur $(v; -u; 0)$ est un vecteur du noyau de T (on l'a vu) et que c'est manifestement un vecteur propre de D pour la valeur propre a, on a

$$D(t)\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} + tT\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $(v; -u; 0)$ n'est pas le vecteur nul puisque u, v et w sont non nuls, on en déduit que c'est un vecteur propre de $D(t)$ pour la valeur propre a.
On peut ainsi conclure que

$$\boxed{D(t) \text{ admet trois valeurs propres réelles distinctes dont l'une est } a.}$$

b) *Déterminer le sous-espace propre associé à a.*

Nous avons vu à la question précédente que

$$\boxed{\text{le sous-espace propre } E_a^{D(t)} \text{ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur } (v; -u; 0).}$$