Solution de Catherine Le Merdy
Sup PTSI - Lycée Joliot Curie - Rennes
e-mail : clemerdy@supelec-rennes.fr

ENSAM - Banque PT - Epreuve I-A

PARTIE I

1. Vérification immédiate

---

2. $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + \dfrac{\lambda^2}{3} + \dfrac{\lambda}{3} + \dfrac{1}{3}$
a) 1 est racine évidente donc <u>1 est valeur propre de A</u>
b) $\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \dfrac{2}{3}\lambda + \dfrac{1}{3})$
donc les deux autres valeurs propres sont :

$$\lambda_2 = -\frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{2}}{3} \quad , \quad \lambda_3 = -\frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{2}}{3}$$

λ_2 et λ_3 ne sont pas réelles ; $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
c) 1 étant la seule valeur propre réelle, si A était diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on aurait $A = I_3$, ce qui est exclu.
<u>A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$</u>
A possède dans $\mathbb{C}$ trois valeurs propres distinctes, donc <u>A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$</u>.

---

3. a) Notons $\lambda_1 = 1$
$\forall i \in \{1,2,3\}$, λ_i est valeur propre de A donc $\exists X_i \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \setminus \{O\}$ tel que $AX_i = \lambda_i X_i$
alors : $\forall n \geq 1 \qquad A^n X_i = \lambda_i^n X_i$
Conséquence : X_i vecteur propre de A^n ; or (X_1, X_2, X_3) base (car base de vecteurs propres de A), dont base de vecteurs propres de A^n, donc A^n est diagonalisable ;
<u>les valeurs propres sont 1, λ_2^n, λ_3^n</u>
b) Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$
alors $\exists P \in GL_3(\mathbb{C})$ tel que $A = P^{-1}DP$; alors $A^n = P^{-1}D^nP$
donc $\begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
En effectuant le produit, on trouve $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $v_n = \alpha + \beta\lambda_2^n + \gamma\lambda_3^n$,
α, β, γ ne dépendant que de P, a, b, c donc indépendants de n
CC : <u>$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \geq 1 \quad v_n = \alpha + \beta\lambda_2^n + \gamma\lambda_3^n$</u>
c) Soit $x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$
$x^n(v_n - \alpha) = \beta(x\lambda_2)^n + \gamma(x\lambda_3)^n$
or $|x\lambda_2| < 1$ et $|x\lambda_3| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (x\lambda_2)^n = \lim\limits_{n\to\infty} (x\lambda_3)^n = 0$
donc <u>$\lim\limits_{n\to\infty} x^n(v_n - \alpha) = 0$</u>
vrai en particulier avec $x = 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - \alpha) = 0$: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \alpha}$
or (v_n) est une suite à valeurs réelles donc sa limite est dans $\mathbb{R}$: $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

---

4. $w_n = v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2}$
On vérifie que $\forall n \geq 0 \quad w_{n+1} = w_n$; csq : $\forall n \geq 0 \quad w_n = w_0$
donc : $\forall n \geq 0 \quad v_n + 2v_{n+1} + 3v_{n+2} = a + 2b + 3c$

Quand $n \to \infty$, on trouve : $6\alpha = a + 2b + 3c$, c'est-à-dire $\boxed{\alpha = \dfrac{a+2b+3c}{6}}$

PARTIE II

1. a)$\lim u_n = \lim u_{n+1} = u \neq 0$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$
d'après la règle de d'Alembert : $\rho = 1$
b) $\lim \dfrac{u_n - u}{\mu^n} = 0$ donc $\left((u_n - u)\dfrac{1}{\mu^n}\right)$ est une suite bornée,
donc d'après le lemme d'Abel, $\boxed{\tilde{\rho} \geq \dfrac{1}{\mu}}$

---

2. a) Soit $x \in]-\rho, \rho[$; alors $x \in]-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}[\quad (\dfrac{1}{\mu} > 1)$
alors $U(x) = \sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n = \sum\limits_{n\geq 0} (u_n - u)x^n + \sum\limits_{n\geq 0} ux^n = \underline{\tilde{U}(x) + \dfrac{u}{1-x}}$
b) $\tilde{U}$ est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est ¿1 donc $\tilde{U}$ est continue en tout point de $[-1, 1]$
Dans la formule du a) , posons $x = 1 - h$: $U(1-h) = \tilde{U}(1-h) + \dfrac{u}{h}$
donc : $hU(1-h) = h\tilde{U}(1-h) + u$
Quand $h \to 0^+ \quad \lim \tilde{U}(1-h) = \tilde{U}(1)$ (car $\tilde{U}$ est continue à gauche en 1)
donc $\lim h\tilde{U}(1-h) + u = u$
CC : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0^+} hU(1-h) = u}$

---

3. a) Soit $x \in]-\rho, \rho[$

$$\begin{aligned}(3 - x - x^2 - x^3)U(x) &= \sum_{n\geq 0} 3v_n x^n - \sum_{n\geq 0} v_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} v_n x^{n+2} - \sum_{n\geq 0} x^{n+3} \\ &= \sum_{n\geq 0} 3v_n x^n - \sum_{n\geq 1} v_{n-1} x^n - \sum_{n\geq 2} v_{n-2} x^n - \sum_{n\geq 3} v_{n-3} x^n \\ &= 3v_0 + 3v_1 x + 3v_2 x^2 - v_0 x - v_1 x^2 - v_0 x^2 + \sum_{n\geq 3} \underbrace{(3v_n - v_{n-1} - v_{n-2} - v_{n-3})}_{=0} x^n\end{aligned}$$

$\underline{(3 - x - x^2 - x^3)U(x) = 3a + (3b - a)x + (3c - b - a)x^2}$
b) $\forall x \in]-\rho, \rho[, \quad x \in]-1, 1[$, donc $3 - x - x^2 - x^3 \neq 0$
donc $\boxed{U(x) = \dfrac{3a + (3b-a)x + (3c-b-a)x^2}{3 - x - x^2 - x^3}}$
Posons $x = 1 - h$: $U(1-h) = \dfrac{3a + (3b-a)(1-h) + (3c-b-a)(1-h)^2}{h(6 - 4h + h^2)}$
donc $hU(1-h) = \dfrac{3a + (3b-a)(1-h) + (3c-b-a)(1-h)^2}{6 - 4h + h^2}$

$$\boxed{\lim_{h\to 0^+} hU(1-h) = \frac{a+2b+3c}{6}}$$

$\boxed{\text{PARTIE III}}$

1. $\forall i \in [\![0, k-1]\!] \qquad m_n \leq x_{n+i} \leq M_n \quad$, donc $\quad km_n \leq \sum_{i=0}^{k-1} x_{n+i} \leq kM_n$

donc $\underline{m_n \leq x_{n+k} \leq M_n}$

$\forall i \in [\![1, k]\!] \qquad x_{n+i} \leq M_n \quad$ donc $\quad M_{n+1} = \underset{i \in [\![1,k]\!]}{\text{Max}}\, x_{n+i} \leq M_n$

donc : $\underline{(M_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite décroissante}}$

De même $(m_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante

---

2. $(M_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, $(m_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

On montre que (M_n) est minorée par m_0 ; elle converge donc. Soit L sa limite.

De même (m_n) est majorée par M_0 ; elle converge ; soit l sa limite.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad m_n \leq M_n \quad$ donc $\quad \underline{l \leq L}$

---

3. Soit $n \geq 0 \quad ; \quad$ soit i_0 tel que $M_n = x_{n+i_0}$

alors $x_{n+k} = \dfrac{1}{k}\left(x_{n+i_0} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k-1} x_{n+i} \right) = \dfrac{1}{k}\left(M_n + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k-1} x_{n+i} \right) \geq \dfrac{1}{k}\left(M_n + (k-1)m_n\right)$

$$\boxed{x_{n+k} \geq \frac{1}{k}\left(M_n + (k-1)m_n\right)}$$

---

4. $\varepsilon = L - l > 0$

a) (m_n)est croissante, converge, donc $l = \lim(m_n) = \text{Sup}(m_n)$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m_{n_0} \geq l - \varepsilon/k$;

Comme (m_n) est croissante, $\underline{\forall n \geq n_0 \qquad m_n \geq l - \varepsilon/k}$

b) Csq : $\forall n \geq n_0 \qquad M_n \geq L$ (car (M_n) est décroissante)

donc $M_n \geq l + \varepsilon$, donc $x_{n+k} \geq \dfrac{1}{k}(l + \varepsilon + (k-1)(l - \varepsilon/k))$

$$\boxed{x_{n+k} \geq l + \varepsilon/k^2}$$

Csq : Soit $j \geq n_0 + k$; alors $\forall i \in [\![0, k-1]\!] \quad j + i \geq n_0 + k$

donc $x_j \geq l + \varepsilon/k^2$

donc $\underline{m_j = \underset{i \in [\![0,k-1]\!]}{\text{Min}}\, x_{j+i} \geq l + \varepsilon/k^2}$

Csq : $\lim_{j\to+\infty} m_j = l \geq l + \varepsilon/k^2$, avec $\varepsilon/k^2 > 0$, d'où contradiction.

$$\boxed{\text{CC} : L = l}$$

---

5. $\forall n \geq k \qquad m_{n-k} \leq x_n \leq M_{n-k}$

Or $\lim m_{n-k} = \lim M_{n-k} = L$; $\underline{\text{CC} : (x_n) \text{ converge vers } L}$

---

6. $y_n = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) x_{n+j}$

a) $\forall n \geq 0 \qquad y_{n+1} = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)x_{n+1+j} = kx_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-2}(j+1)x_{n+1+j} = \sum_{j=0}^{k-1} x_{n+j} + \sum_{j=0}^{k-2}(j+1)x_{n+1+j}$

$= \sum_{j=0}^{k-1} x_{n+j} + \sum_{j=1}^{k-1} j x_{n+j} = x_n + \sum_{j=1}^{k-1}(j+1)x_{n+j} = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)x_{n+j} = y_n$

CC : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_{n+1} = y_n}$, donc $y_n = y_0$

b) donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n + 2x_{n+1} + 3x_{n+2} + \ldots + kx_{n+k-1} = a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \ldots + ka_{k-1}$
par passage à la limite quand $n \to +\infty$:
$(1 + 2 + 3 + \ldots + k) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \ldots + ka_{k-1}$

donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{a_0 + 2a_1 + 3a_2 + \ldots + ka_{k-1}}{1 + 2 + 3 + \ldots + k}}$

PARTIE IV

1. Soit f solution.
Alors, $\forall x \in]1, +\infty[\qquad [x-1, x] \subset [0, +\infty[$, donc f est continue sur $[x-1, x]$

donc $x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(y)\,dy$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

et sa dérivée est $x \mapsto f(x) - f(x-1)$, qui est continue sur $]1, +\infty[$

CC : $f\colon x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(y)\,dy$ est <u>de classe C^1 sur $]1, +\infty[$</u>

---

2. a) g_n est solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre : $y' - y = -g_{n-1}(x) \quad (E)$
*Equation sans second membre : $y' - y = 0$
Ensemble des solutions : $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$
*Equation avec second membre :
Soit $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable.
Soit $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto u(x)e^x$
φ solution de (E) sur $[0,1] \iff \forall x \in [0,1] \quad u'(x) = -g_{n-1}(x)$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in [0,1] \qquad u(x) = \int_0^x -g_{n-1}(t)e^{-t}\,dt + \lambda$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in [0,1] \qquad \varphi(x) = e^x \int_0^x -g_{n-1}(t)e^{-t}\,dt + \lambda e^x$$

Csq : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1] \quad g_n(x) = e^x \displaystyle\int_0^x -g_{n-1}(t)e^{-t}\,dt + \lambda e^x$

Or $g_n(0) = g_{n-1}(1)$ donc $\lambda = g_{n-1}(1)$

donc : $\boxed{\forall x \in [0,1] \quad g_n(x) = e^x \left[g_{n-1}(1) - \displaystyle\int_0^x g_{n-1}(t)e^{-t}\,dt \right]}$

b) $\forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], \quad g_n'(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$ (condition (ii))

donc $\displaystyle\int_0^1 g_n'(y)\,dy = \int_0^1 (g_n(y) - g_{n-1}(y))\,dy$
$\qquad = g_n(1) - g_n(0)$

donc $\boxed{g_n(1) - g_n(0) = \displaystyle\int_0^1 (g_n(y) - g_{n-1}(y))\,dy}$

Récurrence sur n :

$n = 0$: $g_0(1) = g(1) = \displaystyle\int_0^1 g_0(t)\,dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $g_n(1) = \displaystyle\int_0^1 g_n(y)\,dy$

alors $g_{n+1}(0) = \displaystyle\int_0^1 g_n(y)\,dy$

donc, d'après la formule ci - dessus : $g_{n+1}(1) = \displaystyle\int_0^1 g_{n+1}(y)\,dy$

$$\text{CC : } \boxed{\forall n \geq 0 \qquad g_n(1) = \int_0^1 g_n(y)\,dy}$$

c) Soit $n \geq 1$

Soit $h_n\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^x g_n(y)\,dy + \int_x^1 g_{n-1}(y)\,dy$

Comme g_n et g_{n-1} sont continues, h_n est dérivable sur $[0,1]$ et

$\forall x \in [0,1] \qquad h_n'(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x) = g_n'(x)$

Csq : $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1] \quad g_n(x) = \alpha + \displaystyle\int_0^x g_n(y)\,dy + \int_x^1 g_{n-1}(y)\,dy.$

En $x=1$: $g_n(1) = \alpha + \displaystyle\int_0^1 g_n(y)\,dy$ donc $\alpha = 0$

$$\text{CC : } \boxed{\forall x \in [0,1] \qquad g_n(x) = \int_0^x g_n(y)\,dy + \int_x^1 g_{n-1}(y)\,dy}$$

d) $\forall n \geq 0,\ \forall x \in [n, n+1[\qquad F(x) = g_n(x-n)$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$

* Si $x_0 \notin \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset [n, n+1[$

et alors, $\forall x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\qquad F(x) = g_n(x-n)$

Or : $x \mapsto x-n$ est continue en x_0, g_n est continue en $x_0 - n$, donc F est continue en x_0

* Si $x_0 \in \mathbb{N}$, on montre comme précédemment que F est continue à droite en x_0

Continuité à gauche ?

$\forall x \in [x_0-1, x_0[\qquad F(x) = g_{x_0-1}(x - x_0 + 1)$

$F(x_0) = g_{x_0}(0) = g_{x_0-1}(1)$

Or g_{x_0-1} est continue à gauche en 1, donc $x \mapsto g_{x_0-1}(x-x_0+1)$ est continue à gauche en x_0.

Donc F est continue à gauche en x_0

CC : <u>F est continue sur $\mathbb{R}^+$</u>

Soit $x \geq 1$; soit $n = \mathrm{E}(x) - 1$

Alors : $\displaystyle\int_{x-1}^x F(y)\,dy = \int_{x-1}^{n+1} F(y)\,dy + \int_{n+1}^x F(y)\,dy = \underbrace{\int_{x-1}^{n+1} g_n(y-n)\,dy}_{\text{posons } z = y-n} + \underbrace{\int_{n+1}^x g_{n+1}(y-n-1)\,dy}_{\text{posons } z = y-n-1}$

$= \displaystyle\int_{x-1-n}^1 g_n(z)\,dz + \int_0^{x-1-n} g_{n+1}(z)\,dz = g_{n+1}(x-1-n) = F(x)$

$$\text{CC : } \boxed{F(x) = \int_{x-1}^x F(y)\,dy}$$

---

3. a) $\forall x \geq 0 \qquad h(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} uf(u)\,du - x\int_x^{x+1} f(u)\,du$

Or $u \mapsto uf(u)$ et $u \mapsto f(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $[x, x+1]$, donc h est dérivable.

b) $\forall x \geq 0 \qquad h'(x) = (x+1)f(x+1) - xf(x) - \displaystyle\int_x^{x+1} f(u)\,du - x(f(x+1) - f(x))$

$= f(x+1) - \displaystyle\int_x^{x+1} f(u)\,du = 0$ (d'après l'hypothèse faite dans cette question)

donc <u>h est constante sur $[0, +\infty[$</u>