Banque filière PT
Epreuve Mathématique I-A

Corrigé de J-Pierre DURIN (PT Cluny)

Partie I

1°) tend vers 1 quand t tend vers 0. **On posera donc f(0) = 1** pour prolonger par continuité f en 0.

2°) F: [0,+[Rdéfinie par F(x) = est bien définie puisque, f étant continue sur [0,x], elle est intégrable sur cet intervalle.

Tableau de variation de F sur [2kπ , (2k+3)π].

F est dérivable de dérivée f(x), d'où:

1er cas: k=0

x	0		π		2π		$?\pi$
F'(x)	1	+	0	-	0	+	0
F(x)	0		$\theta_?$		$\theta_?$		$\theta_?$

2ème cas: k0

x	$2k\pi$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$		$(?k+?)\pi$
F'(x)	0	+	0	-	0	+	0
F(x)	θ_{2k}		$\theta_{?k+?}$		$\theta_{?k+2}$		$\theta_{?k+3}$

3°) On pose pour n N $u_n = (-1)^n$

a) **Calculons** . Dans u_k effectuons le changement de variable $u = t+k\pi$. $u_k = (-1)^k$ soit $u_k =$. Dès lors = =

Conclusion: $= \theta_n$

Convergence de la série u_n La série u_n converge d'après le critère des séries alternées. En effet:
est bien alternée.
= = 0 quand n .
- = - 0 donc est décroissant.

Conclusion: La série de terme général u_n est convergente.

b) **On sait que θ_{2k} et θ_{2k+1}** , sommes partielles d'indice pair et impair d'une série alternée vérifiant le critère, sont deux suites adjacentes.
$\theta_{2k+2} - \theta_{ék} = u_{2k} + u_{2k+1} =$ - 0

Conclusion: **θ_{2k} est une suite croissante, et par suite θ_{2k+1} est une suite décroissante**.

c) **La série de terme général u_n** n'est pas absolument convergente. En effet:

= terme général d'une série divergente. **<u>Conclusion:</u> u_n n'est pas absolument convergente.**

4°) <u>Convergence</u> **de .**

Il s'agit d'étudier F(x). Or pour x [2kπ , (2k+2)π] on a d'après le tableau de variation de F:

Si x [2kπ , (2k+1)π] alors θ_{2k} F(x) θ_{2k+1}

Si x [(2k+1)π , (2k+2)π] alors θ_{2k+2} F(x) θ_{2k+1}

Mais comme θ_{2k} θ_{2k+2} (croissance de θ_{2k}), on peut assurer que **x [2kπ , (2k+2)π]** θ_{2k} **F(x)** θ_{2k+1}

et par suite quand x, k, θ_{2k} et θ_{2k+1} tendent vers la même limite U = et donc F U

<u>Conclusion:</u> est convergente et vaut U.

<u>L'intégrale</u> n'est pas absolument convergente. En effet:

= vaut (en posant u = t+kπ) soit de sorte que

= et cette quantité tend vers + quand n, ce qui assure le résultat cherché.

<u>Conclusion:</u> n'est pas absolument convergente.

<u>Partie II</u>

: [0 , +[R définie par

1°) existe puisque et que l'on vient de montrer la convergence de cette intégrale.

Pour > 0 l'intégrale définissant est alors une intégrale absolument convergente donc convergente. En effet, M > 0 tel que, pour tout x0, on a M (Cf est continu sur [0 , +[et tend vers 0 quand x)
Dès lors M dont l'intégrale sur [0 , +[converge, ce qui assure la convergence absolue de .

<u>Conclusion:</u> est bien définie sur [0 , +[

2°) Soit a > 0

est continue sur [a , +[. En effet est continue sur [a , +[[0 , +[comme produit de deux fonctions continues sur cet ensemble.

fonction indépendante de dont l'intégrale sur [0 , +[est convergente. (Cf 1°))

Le théorème sur la continuité d'une fonction définie par une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique.

<u>Conclusion:</u> est continue sur [a , +[et ce a > 0 donc sur]0 , +[

est dérivable de dérivée continue sur [a , +[. En effet et on a:

est continue sur [a , +[[0 , +[.

fonction indépendante de s dont l'intégrale sur [0 , +[est convergente.

Le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique. est dérivable, de dérivée continue sur [a , +[et ce a>0 donc sur]0 , +[. **<u>Conclusion:</u> est de classe C_1 sur]0 , +[**

<u>Calcul de</u> '

Une primitive de est de la forme . Après dérivation de cette expression et identification avec on obtient et d'où '

<u>Conclusion:</u> sur]0 , +['

3°) **<u>Calcul de</u>**

Or on a vu M pour tout [0 , +[donc MM

222222222222

Conclusion: = 0

Sur]0 ,+[et le résultat précédent fournit d'où

Conclusion:

Partie III

1°) Pour >0 on a donc et

Conclusion: δ γ

?°) Avec les hypothèses faites: puis:
et enfin et finalement

Conclusion:

3°) D'après ce qui précède >0 car quantité fixe indépendante de

Conclusion: **et donc** γ

Partie IV

1°) On a que F est continue sur [0 , +[et F existe. La fonction F possède donc les propriétés de la fonction g de la partie III. Une intégration par parties en posant u F u'f
v' v donne:
FFf La partie toute intégrée est nulle, il reste donc:

Conclusion: **Ff**

2°) D'après III_3 , FF donc comme F d'après IV_1 , on peut écrire: F soit **Conclusion:**

3°) **Existence de** I

On peut se contenter d'étudier pour vu l'imparité de l'expression donnant I.
, I.
> , on pose dans l'intégrale et
Finalement I

Existence de C

On a: C ce qui permet d'écrire CII ce qui assure l'existence de C et en donne l'expression: C et on complète C étant paire.

PartieV

1°) (On sait qu'il s'agit bien d'une intégrale convergente)
Une intégration par partie donne en posant
soit
et une nouvelle intégration par parties founit:
soit :

Conclusion: **avec**

On va maintenant établir par récurrence la formule suivante:

La formule est vraie pour . On la suppose vraie pour et on la prouve pour ce qui est immédiat en intégrant par parties la dernière intégrale, en posant

On obtient d'où le résultat cherché.

Conclusion: F on a donc

R_n et on a bien

2°) **x > 0 fixé**. Soit , alors dès que et donc la suite est stictement croissante à partir du rang n_0 tel que n_0 = E(x) +1.

Conclusion: Comme , la suite

3°) **Cherchons** tel que La plus petite valeur convenant est . Une valeur approchée de F est donc soit

Conclusion: F

4°) Non. Pour F il faudrait, pour utiliser la même méthode, trouver ce qui n'est pas possible.