**Banque PT – Math I-A**

**Partie I**

1°) La fonction $G$ de $\mathcal{P} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\big\}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $G(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On calcule successivement : $\forall (x,y) \in \mathcal{P}$,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}; \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\Delta G(x,y) = 0.$$

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}.}$$

2°) Si $\varphi$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, alors, par composition, $F : (x,y) \mapsto \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$; donc $F$ est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\forall (x,y) \in \mathcal{P},\ \Delta F(x,y) = 0$.
On calcule successivement : $\forall (x,y) \in \mathcal{P}$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right); \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}\,\varphi''\left(\frac{x}{y}\right); \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2\,x}{y^3}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}\,\varphi''\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$\Delta F(x,y) = \frac{2\,x}{y^3}\,\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4}\right)\,\varphi''\left(\frac{x}{y}\right).$$

Donc $F$ est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\quad 2\,\dfrac{x}{y}\,\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right) + \left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right)\,\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right) = 0$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\quad 2\,t\,\varphi'(t) + (1+t^2)\,\varphi''(t) = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi'(t) = \lambda\, e^{-\ln(1+t^2)} = \dfrac{\lambda}{1+t^2}$

$\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\quad \varphi(t) = \lambda \operatorname{Arctan} t + \mu.$

$$\boxed{\text{Les applications } \varphi \text{ cherchées sont de la forme : } t \mapsto \lambda \operatorname{Arctan} t + \mu,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

3°) L'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t}$ est impaire, ainsi que l'application sgn, donc il suffit d'établir l'égalité demandée dans le cas $t > 0$.
Dans ce cas, en notant $\alpha = \operatorname{Arctan} t$, on a : $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, et $\tan\alpha = t$, donc $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \dfrac{1}{t}$, et comme $\frac{\pi}{2} - \alpha$ est aussi dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a aussi : $\frac{\pi}{2} - \alpha = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t}$. Donc, si $t > 0$, $\operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$.
On a bien :

$$\boxed{\text{pour tout réel } t \text{ non nul, } \operatorname{Arctan} t + \operatorname{Arctan}\frac{1}{t} = \operatorname{sgn}(t)\,\frac{\pi}{2}.}$$

4°) $\operatorname{Arg}(z)$ désigne l'argument principal du nombre complexe non nul $z$. On a donc, si $z = x + i\,y$, $(x,y) \in \mathcal{P}$ : $\operatorname{Arg}(z) \in ]0, \pi[$, et

$$\begin{cases} x = |z|\ \cos\big(\operatorname{Arg}(z)\big) \\ y = |z|\ \sin\big(\operatorname{Arg}(z)\big) \end{cases}$$

– Si $x > 0$, alors $\operatorname{Arg}(z) \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\dfrac{y}{x} = \tan\big(\operatorname{Arg}(z)\big)$, donc

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - G(x,y).$$

– Si $x < 0$, alors $\operatorname{Arg}(z) \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ et $\dfrac{y}{x} = \tan\big(\operatorname{Arg}(z)\big) = \tan\big(\operatorname{Arg}(z) - \pi\big)$, avec $\operatorname{Arg}(z) - \pi \in ] - \frac{\pi}{2}, 0[$ donc $\operatorname{Arg}(z) - \pi = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, d'où

$$\operatorname{Arg}(z) = \pi + \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2} - G(x,y).$$

– Si $x = 0$, alors $\operatorname{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2}$, et $G(x,y) = 0$, donc la formule est encore valable.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathcal{P}, \quad G(x,y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(x + i\, y).}$$

5°) – Si $x > 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{y \longrightarrow 0 \\ y>0}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\pi}{2}$ car $\dfrac{x}{y}$ tend vers $+\infty$.

– Si $x < 0$, alors $\displaystyle\lim_{\substack{y \longrightarrow 0 \\ y>0}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{\pi}{2}$ car $\dfrac{x}{y}$ tend vers $-\infty$.

– Si $x = 0$, alors $G(x,y) = 0$, et $\displaystyle\lim_{\substack{y \longrightarrow 0 \\ y>0}} G(x,y) = 0$

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t$ : soit $(x,y) \in \mathcal{P}$ fixé; la fonction $t \mapsto \dfrac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}$ est continue sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (car $(x-t)^2 + y^2 \geq y^2 > 0$), et ses restrictions à ces intervalles se prolongent par continuité en 0.

De plus,

$\dfrac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi\, y}{2\, t^2}$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente.

Le critère d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives permet de conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

On a de même $\dfrac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2} \underset{t \to -\infty}{\sim} -\dfrac{\pi\, y}{2\, t^2}$, et on peut conclure également que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Calcul :

$$\int_0^{+\infty} \frac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\, y \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\, y \left[\frac{1}{y} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-x}{y}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{y\, g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t &= -\frac{\pi}{2}\, y \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2}\, \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\, y \left[\frac{1}{y} \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-x}{y}\right)\right]_{-\infty}^{0} \\ &= -\frac{\pi}{2}\left[-\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{2}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

On a donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \pi \text{ Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)$.

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathcal{P},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\,g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,\mathrm{d}t = \pi\, G(x,y).}$$

**Partie II**

1°) Notons $C_\alpha$ la conique d'équation $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\alpha-1}=1, \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\})$ :
Nature de $C_\alpha$ :

| $\alpha$ | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $\alpha-1$ | $-$ | $-$ | $+$ | |
| Nature | $\emptyset$ | Hyperbole | Ellipse | |

Si $\alpha>1$, l'ellipse a pour centre $O$, pour demi-longueur du grand axe (porté par $Ox$) $a=\sqrt{\alpha}$, pour demi-longueur du petit axe $b=\sqrt{\alpha-1}$.
La distance focale $c$ vérifie $c^2=a^2-b^2=1$, donc $c=1$, et les foyers sont les points $F'(-1,0)$ et $F(1,0)$.
Si $0<\alpha<1$, l'hyperbole a pour centre $O$, pour axe transverse $Ox$; son équation est de la forme $\dfrac{x^2}{a'^2}-\dfrac{y^2}{b'^2}=1$, avec $a'=\sqrt{\alpha}$, et $b'=\sqrt{1-\alpha}$.
La distance focale $c'$ vérifie $c'^2=a'^2+b'^2=1$, donc $c'=1$, et les foyers sont encore $F$ et $F'$.

$$\boxed{\text{Les coniques de la famille } \mathcal{F}\ (\alpha\in]0,1[\cup]1,+\infty[) \text{ ont mêmes foyers.}}$$

2°) $(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$ étant donné, avec $x_0\neq 0$, la fonction $\psi:\alpha\mapsto \dfrac{x_0^2}{\alpha}+\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}-1$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, et est somme de fonctions décroissantes sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$, et $]1,+\infty[$. On a donc le tableau suivant :

| $\alpha$ | $-\infty$ | | $0$ | | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | | $\searrow$ | $-1$ |

La conique $C_\alpha$ de la famille $\mathcal{F}$ passe par $M_0(x_0,y_0)\in\mathcal{P}$, avec $x_0\neq 0$, si et seulement $\alpha$ vérifie $\psi(\alpha)=0$ (avec $\alpha\in]0,1[\cup]1,+\infty[$); l'examen du tableau de variations montre qu'il y a exactement deux telles valeurs ($\psi$ est continue), l'une dans $]0,1[$ et l'autre dans $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } (x_0,y_0)\in\mathcal{P}, \text{ avec } x_0\neq 0, \text{ il passe exactement une ellipse et une hyperbole de la famille } \mathcal{F}.}$$

L'équation $\psi(\alpha)=0$ équivaut à $\alpha\,(\alpha-1)=(\alpha-1)\,x_0^2+\alpha\,y_0^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha\,(1+x_0^2+y_0^2)+x_0^2=0$; on a donc

$$\boxed{\begin{cases}\alpha_1\,\alpha_2 = x_0^2\\ \alpha_1+\alpha_2 = 1+x_0^2+y_0^2\end{cases}}$$

Si $x_0=0$, alors une conique de la famille $\mathcal{F}$ passe par le point $(0,y_0)$ $(y_0>0)$ si et seulement si il existe un réel $\alpha$ de $]0,1[\cup]1,+\infty[$ vérifiant
$\dfrac{y_0^2}{\alpha-1}=1\Leftrightarrow \alpha-1=y_0^2\Leftrightarrow \alpha=1+y_0^2>1$.

$$\boxed{\text{Pour tout point } (0,y_0)\in\mathcal{P}, \text{ il passe exactement une conique de la famille } \mathcal{F}\text{; il s'agit d'une ellipse.}}$$

3°) Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, avec $x_0 \neq 0$, et $C_{\alpha_1}$, $C_{\alpha_2}$ les coniques de $\mathcal{F}$ passant par $M_0$.
La tangente en $M_0$ à $C_{\alpha_1}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x\,x_0}{\alpha_1} + \frac{y\,y_0}{\alpha_1 - 1} = 1.$$

De même, la tangente en $M_0$ à $C_{\alpha_2}$ a pour équation cartésienne

$$\frac{x\,x_0}{\alpha_2} + \frac{y\,y_0}{\alpha_2 - 1} = 1.$$

Vérifions l'orthogonalité de ces deux droites en faisant le produit scalaire des vecteurs normaux :

$$\frac{x_0}{\alpha_1}\,\frac{x_0}{\alpha_2} + \frac{y_0}{\alpha_1 - 1}\,\frac{y_0}{\alpha_2 - 1} = \frac{x_0^2}{\alpha_1\,\alpha_2} + \frac{y_0^2}{\alpha_1\,\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) + 1} = \frac{x_0^2}{x_0^2} + \frac{y_0^2}{x_0^2 - (1 + x_0^2 + y_0^2) + 1} = 1 - 1 = 0.$$

$$\boxed{\text{Les tangentes en un point commun à deux coniques de } \mathcal{F} \text{ sont orthogonales.}}$$

4°) La fonction $x : (u, v) \mapsto \operatorname{ch} u \cos v$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a immédiatement :
$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u, v) = \operatorname{ch} u \cos v, \qquad \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}(u, v) = -\operatorname{ch} u \cos v,$
donc $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta x(u, v) = 0$, et la fonction $x$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
De même, la fonction $y : (u, v) \mapsto \operatorname{sh} u \sin v$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} = y, \quad \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -y$, donc $\Delta y = 0$; la fonction $y$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\text{Les fonctions } x \text{ et } y \text{ sont harmoniques sur } \mathbb{R}^2.}$$

La matrice jacobienne de $H : (u, v) \mapsto \big(x(u, v), y(u, v)\big)$ au point $(u, v)$ s'écrit

$$J_H(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v \\ \operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v \end{pmatrix}.$$

Le jacobien de $H$ en $(u, v)$ est

$$\begin{aligned} |J_H|(u, v) &= \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v \\ \operatorname{ch} u \sin v & \operatorname{sh} u \cos v \end{vmatrix} = \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v = \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + (1 + \operatorname{sh}^2 u) \sin^2 v \\ &= \operatorname{sh}^2 u\,(\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 v = \operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v. \end{aligned}$$

On a donc $|J_H|(u, v) = 0 \iff \operatorname{sh} u = 0$ et $\sin v = 0 \iff u = 0$ et $v = 0 \pmod{\pi}$.

$$\boxed{\text{Le jacobien de } H \text{ s'annule aux points } (0, k\,\pi),\ k \in \mathbb{Z}.}$$

5°) Image par $H$ de la droite $u = u_0$ : il s'agit de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = \operatorname{ch} u_0 \cos v \\ y = \operatorname{sh} u_0 \sin v \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}$.
– si $u_0 \neq 0$, on reconnaît une ellipse de centre $O$, de demi-longueurs d'axes $\operatorname{ch} u_0$ et $|\operatorname{sh} u_0|$.
Son équation cartésienne est $\dfrac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \dfrac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \dfrac{y^2}{\operatorname{ch}^2 u_0 - 1} = 1$; l'ellipse en question est donc $C_{\operatorname{ch}^2 u_0}$.
– si $u_0 = 0$, le paramétrage s'écrit $\begin{cases} x = \cos v \\ y = 0 \end{cases}, \quad v \in \mathbb{R}$, et on reconnaît le segment d'extrémités $(-1, 0)$ et $(1, 0)$, c'est-à-dire $[F'F]$.

$$\boxed{H \text{ transforme la droite d'équation } u = u_0 \text{ en l'ellipse } C_{\operatorname{ch}^2 u_0} \text{ si } u_0 \neq 0 \text{, en le segment } [F'F] \text{ sinon.}}$$

Image par $H$ de la droite $v = v_0$ : il s'agit de la courbe paramétrée $\begin{cases} x = \cos v_0 \operatorname{ch} u \\ y = \sin v_0 \operatorname{sh} u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}$.
– si $v_0 \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$, on reconnaît une branche d'hyperbole d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{\cos^2 v_0} - \dfrac{y^2}{\sin^2 v_0} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\cos^2 v_0} + \dfrac{y^2}{\cos^2 v_0 - 1} = 1$; l'hyperbole en question est donc $C_{\cos^2 v_0}$; la branche parcourue est celle située dans le demi-plan $x \cos v_0 > 0$.

– si $v_0 = 0 \pmod{\pi}$, le paramétrage s'écrit $\begin{cases} x = \varepsilon \operatorname{ch} u \\ y = 0 \end{cases}$, $\quad u \in \mathbb{R} (\varepsilon \in \{-1, 1\}$ fixé$)$. On obtient les demi-droites $[Fx)$ (cas $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire $v_0 = 0 \pmod{2\pi}$) et $[F'x')$ (cas $v_0 = \pi \pmod{2\pi}$).
– si $v_0 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, le paramétrage s'écrit $\begin{cases} x = 0 \\ y = \varepsilon \operatorname{sh} u \end{cases}$, $\quad u \in \mathbb{R}, (\varepsilon \in \{-1, 1\}$ fixé$)$ et on obtient l'axe des ordonnées.

| |
|---|
| $H$ transforme la droite d'équation $v = v_0$ en :<br>– la branche de l'hyperbole $C_{\cos^2 v_0}$ située dans le demi-plan $x \cos v_0 > 0$ si $v_0 \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$;<br>– la demi-droite $[Fx)$ si $v_0 = 0 \pmod{2\pi}$;<br>– la demi-droite $[F'x')$ si $v_0 = \pi \pmod{2\pi}$;<br>– l'axe $y'Oy$ si $v_0 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. |

Recherche des images réciproques par $H$ des coniques $C_\alpha$, et des axes $x'Ox$, $y'Oy$ :
Soit $C_\alpha$ la conique d'équation $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha - 1} = 1$ ($\alpha \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$).
$H^{-1}(C_\alpha) = \Big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\alpha} + \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\alpha - 1} = 1\Big\}$.

– Si $\alpha > 1$, alors soit $u_0$ l'unique réel strictement positif tel que $\operatorname{ch} u_0 = \sqrt{\alpha}$. On cherche les couples $(u, v)$ tels que $\frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\operatorname{sh}^2 u_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\operatorname{ch}^2 u_0} + \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\operatorname{sh}^2 u_0} = \cos^2 v + \sin^2 v$
$\Leftrightarrow \left(\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u_0} - 1\right) \cos^2 v + \left(\frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u_0} - 1\right) \sin^2 v = 0$.
Si $|u| < u_0$, alors $\begin{cases} \operatorname{ch}^2 u < \operatorname{ch}^2 u_0 \\ \operatorname{sh}^2 u < \operatorname{sh}^2 u_0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u_0} - 1 > 0 \\ \frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u_0} - 1 > 0 \end{cases}$ et l'égalité précédente implique $\cos v = \sin v = 0$, ce qui est impossible.
De même, $|u| > u_0$ est impossible, car alors $\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{ch}^2 u_0} - 1$ et $\frac{\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{sh}^2 u_0} - 1$ sont tous deux $< 0$.
On a donc nécessairement $u = \pm u_0$, et dans ces conditions tout réel $v$ convient.
En notant $\phi$ la réciproque de la restriction de ch à $\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{si } \alpha > 1,\ H^{-1}(C_\alpha) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u = \pm\phi(\sqrt{\alpha}),\ v \in \mathbb{R}\big\}}$$

– Si $\alpha \in ]0, 1[$, alors soit $v_0 = \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}$. $v_0 \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, et on cherche les couples $(u, v)$ tels que $\frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\cos^2 v_0} - \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\sin^2 v_0} = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v}{\cos^2 v_0} - \frac{\operatorname{sh}^2 u \sin^2 v}{\sin^2 v_0} = \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u$
$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos^2 v}{\cos^2 v_0} - 1\right) \operatorname{ch}^2 u - \left(\frac{\sin^2 v}{\sin^2 v_0} - 1\right) \operatorname{sh}^2 u = 0$.
Si $v$ vérifie $-v_0 < v < v_0 \pmod{2\pi}$ ou $\pi - v_0 < v < \pi + v_0 \pmod{2\pi}$, alors $\begin{cases} |\cos v| > |\cos v_0| \\ |\sin v| < |\sin v_0| \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v_0} - 1 > 0 \\ \frac{\sin^2 v}{\sin^2 v_0} - 1 < 0 \end{cases}$ et l'égalité précédente implique $\operatorname{ch} u = \operatorname{sh} u = 0$, ce qui est impossible.
De même, $v_0 < v < \pi - v_0 \pmod{2\pi}$ ou $-\pi - v_0 < v < -v_0 \pmod{2\pi}$ sont impossibles, car alors $\begin{cases} \frac{\cos^2 v}{\cos^2 v_0} - 1 < 0 \\ \frac{\sin^2 v}{\sin^2 v_0} - 1 > 0 \end{cases}$.
On a donc nécessairement $v = \pm \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha} \pmod{2\pi}$, ou $v = \pi \pm \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha} \pmod{2\pi}$ et dans ces conditions tout réel $u$ convient. En conclusion :

| |
|---|
| si $\alpha \in ]0, 1[$,<br>$H^{-1}(C_\alpha) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R},\ v \in \{\operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}, -\operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}, \pi - \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}, \pi + \operatorname{Arccos} \sqrt{\alpha}\} \pmod{2\pi}\big\}$. |

– $H^{-1}(x'Ox) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{sh} u \sin v = 0\big\} = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ u = 0 \text{ ou } v = 0 \pmod{\pi}\big\}$.
– $H^{-1}(y'Oy) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ \operatorname{ch} u \cos v = 0\big\} = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2,\ v = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\big\}$.

Montrons que : $\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{P},\ \exists (u_0, v_0) \in ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[$ unique, $H(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, ce qui montrera que la restriction de $H$ à $]0, +\infty[ \times ]0, \pi[$ est une bijection de $]0, +\infty[ \times ]0, \pi[$ sur $\mathcal{P}$.

– si $x_0 \neq 0$, alors par $(x_0, y_0)$ il passe exactement une ellipse $C_{\alpha_1}$ et une hyperbole $C_{\alpha_2}$ de la famille $\mathcal{F}$ ($\alpha_1 > 1$ et $0 < \alpha_2 < 1$).
D'après l'étude précédente, il existe un unique réel strictement positif $u_0$ tel que l'image réciproque $H^{-1}\left(C_{\alpha_1}\right)$ soit la droite d'équation $u = u_0$.
De même, il existe un unique réel $v_0$ de $]0, \pi[$ tel que l'image réciproque $H^{-1}\left(C^+_{\alpha_2}\right)$ de la branche de $C_{\alpha_2}$ contenant $(x_0, y_0)$ soit la droite d'équation $v = v_0$ : c'est $v_0 = \operatorname{Arccos}\sqrt{\alpha_2}$ si $x_0 > 0$, et $v_0 = \pi - \operatorname{Arccos}\sqrt{\alpha_2}$ si $x_0 < 0$.
Donc, $H^{-1}(x_0, y_0) = H^{-1}\left(C_{\alpha_1} \cap C^+_{\alpha_2}\right) = H^{-1}\left(C_{\alpha_1}\right) \cap H^{-1}\left(C^+_{\alpha_2}\right) = \{(u_0, v_0)\}$

– si $x_0 = 0$, alors le système d'inconnues $(u, v) \in ]0, +\infty[\times]0, \pi[$ :
$\begin{cases} \operatorname{ch} u \cos v = 0 \\ \operatorname{sh} u \sin v = y_0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} v = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sh} u = y_0 \end{cases}$
et possède une solution unique dans $]0, +\infty[\times]0, \pi[$, qui est $\left(\kappa(y_0), \frac{\pi}{2}\right)$, où $\kappa$ désigne la réciproque de la fonction sh.

$$\boxed{\text{La restriction de } H \text{ à } ]0, +\infty[\times]0, \pi[ \text{ est une bijection de } ]0, +\infty[\times]0, \pi[ \text{ sur } \mathcal{P}.}$$

6°) En supposant que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $f \circ H$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a successivement (le théorème de Schwarz s'applique) : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f \circ H}{\partial u}(u, v) = \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}\big(H(u, v)\big);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f \circ H}{\partial u^2}(u, v) &= \operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh} u \cos v \operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(H(u, v)\big) \\
&\quad + \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{ch} u \sin v \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(H(u, v)\big) \\
&= \operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(H(u, v)\big) \\
&\quad + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(H(u, v)\big) + 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin v \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(H(u, v)\big)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f \circ H}{\partial v}(u, v) = -\operatorname{ch} u \sin v \frac{\partial f}{\partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial f}{\partial y}\big(H(u, v)\big);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f \circ H}{\partial v^2}(u, v) &= -\operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(H(u, v)\big) - \operatorname{ch} u \sin v \operatorname{sh} u \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(H(u, v)\big) \\
&\quad - \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh} u \cos v (-\operatorname{ch} u \sin v) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(H(u, v)\big) \\
&= -\operatorname{ch} u \cos v \frac{\partial f}{\partial x}\big(H(u, v)\big) - \operatorname{sh} u \sin v \frac{\partial f}{\partial y}\big(H(u, v)\big) + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(H(u, v)\big) \\
&\quad + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(H(u, v)\big) - 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin v \cos v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(H(u, v)\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\big(f \circ H\big)(u, v) &= (\operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(H(u, v)\big) + (\operatorname{ch}^2 u \sin^2 v + \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(H(u, v)\big) \\
&= |J_H|\,(u, v)\, \Delta f\big(H(u, v)\big).
\end{aligned}$$

Si $f$ est harmonique sur $\mathcal{P}$, alors par composition, $f \circ H$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$, et le calcul précédent montre qu'alors $\Delta\big(f \circ H\big) = 0$ sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[$. Donc :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}, \text{ la fonction } f \circ H \text{ est harmonique sur } ]0, +\infty[\times]0, \pi[.}$$

**Partie III**

1°) Dans l'intégrale $\displaystyle\iint_{D_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, faisons le changement de variables défini par $\begin{cases} u = a + \rho\cos\theta \\ v = b + \rho\sin\theta \end{cases}$ (coordonnées polaires de pôle $(a,b)$.)

Le jacobien est $\rho$, et le disque fermé de centre $(a,b)$ et de rayon $r$ est obtenu pour $\begin{cases} 0 \le \rho \le r \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$.

On a donc

$$\begin{aligned}\iint_{D_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v &= \iint_{[0,r]\times[0,2\pi]} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^r \left(\rho\int_0^{2\pi} f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^r \rho\, 2\pi\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall r \in ]0,b[,\ \iint_{D_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho.}$$

En employant la formule de Green-Riemann avec $P = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\mathcal{D} = D_r$, on obtient :

$$\iint_{D_r}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v)\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\Gamma_r^+} -\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\,\mathrm{d}v$$

où $\Gamma_r^+$ est le cercle de centre $(a,b)$ de rayon $r$ parcouru dans le sens direct;

en le paramétrant par $\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, l'orientation étant celle des $\theta$ croissants, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_r^+} -\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)\,\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial x}(u,v)\,\mathrm{d}v &= \int_0^{2\pi}\Big(-\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\,(-r\sin\theta) \\ &\qquad + \frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\,(r\cos\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= r\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\iint_{D_r}\Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = r\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta.}$$

2°) La fonction $(r,\theta) \mapsto (a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et transforme le pavé $[0,b[\times[0,2\pi]$ en le disque ouvert de centre $(a,b)$ et de rayon $b$, qui est inclus dans $\mathcal{P}$. Par composition, l'application $(r,\theta) \mapsto f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc en particulier continue, sur $[0,b[\times[0,2\pi]$.

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que l'application $r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est continue sur $[0,b[$. Il en résulte :

$$\boxed{r \mapsto m(a,b,r) \text{ est continue sur } [0,b[.}$$

3°) En employant le résultat du **III** 1°), $M(a,b,r) = \dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho$.

L'application $\rho \mapsto \rho\, m(a,b,\rho)$ est continue sur $[0,b[$, donc, par le théorème fondamental du calcul intégral, l'application $r \mapsto \displaystyle\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\mathrm{d}\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc en particulier continue, sur $[0,b[$. Il en résulte :

$$\boxed{r \mapsto M(a,b,r) \text{ est continue sur } ]0,b[.}$$

Étude de la continuité en 0 :
$\forall r \in ]0,b[$,

$$M(a,b,r) - f(a,b) = \frac{2}{r^2}\left(\int_0^r \rho m(a,b,\rho)\mathrm{d}\rho - \frac{r^2}{2}\, f(a,b)\right) = \frac{2}{r^2}\left(\int_0^r \rho m(a,b,\rho)\mathrm{d}\rho - \int_0^r \rho\, f(a,b)\mathrm{d}\rho\right)$$
$$= \frac{2}{r^2}\int_0^r \rho\,\big(m(a,b,\rho) - f(a,b)\big)\mathrm{d}\rho$$

L'application $\rho \mapsto \rho\, m(a,b,\rho)$ est continue en 0, et $m(a,b,0) = f(a,b)$, donc :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall \rho \in \mathbb{R},\ 0 \le \rho \le \alpha \Rightarrow |m(a,b,\rho) - f(a,b)| \le \varepsilon.$
Il en résulte :
$\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ r \le \alpha \Rightarrow |M(a,b,r) - f(a,b)| \le \dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^r \rho\,\varepsilon\,\mathrm{d}\rho = \varepsilon$
et par définition,

$$\boxed{r \mapsto M(a,b,r) \text{ est continue en } 0.}$$

4°) D'après l'étude faite au **III** 2°), l'application $(r,\theta) \mapsto f(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,b[\times[0,2\pi]$, donc le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que l'application $r \mapsto M(a,b,r)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,b[$. En particulier,

$$\boxed{r \mapsto m(a,b,r) \text{ est dérivable sur } ]0,b[.}$$

Sa dérivée s'obtient par la règle de Leibniz, et on a :
$\forall r \in ]0,b[,\ \dfrac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$
Grâce au **III** 2°), on a encore :

$$\boxed{\forall r \in ]0,b[,\ \frac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \frac{1}{2\pi\, r}\iint_{D_r} \Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.}$$

5°) On a en fait prouvé au **III** 2°) que l'application $r \mapsto \displaystyle\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\mathrm{d}\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,b[$. Donc, l'application $r \mapsto M(a,b,r) = \dfrac{2}{r^2}\displaystyle\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,b[$; en particulier

$$\boxed{r \mapsto M(a,b,r) \text{ est dérivable sur } ]0,b[.}$$

On calcule (dérivation d'un produit et d'une intégrale fonction de sa borne supérieure) :

$$\forall r \in ]0,b[,\ \frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = -\frac{4}{r^3}\int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho + \frac{2}{r^2}\, r\, m(a,b,r) = -\frac{4}{r^3}\,\frac{r^2}{2}\, M(a,b,r) + \frac{2}{r}\, m(a,b,r)$$
$$= \frac{2}{r}\big(m(a,b,r) - M(a,b,r)\big)$$

$$\boxed{\forall r \in ]0,b[,\ \frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = \frac{2}{r}\big(m(a,b,r) - M(a,b,r)\big).}$$

**Partie IV**

1°) Si $f$ est harmonique sur $\mathcal{P}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, et d'après le **III** 4°), pour tout $r$ de $]0,b[$, $\dfrac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = \dfrac{1}{2\pi\, r}\displaystyle\iint_{D_r} \Delta f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0.$
La fonction $r \mapsto m(a,b,r)$ est donc constante sur $]0,b[$, et, par continuité, sur $[0,b[$.

$$\boxed{\text{La fonction } r \mapsto m(a,b,r) \text{ est constante sur son ensemble de définition.}}$$

Comme $m(a,b,0) = f(a,b)$, on a : $\forall r \in [0,b[,\ m(a,b,r) = f(a,b)$. $(a,b)$ étant arbitrairement fixé dans $\mathcal{P}$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}, \text{ alors } f \text{ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur } \mathcal{P}.}$$

2°) Si $f$ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, et d'après le **III** 1°), $\forall r \in ]0,b[,\ \displaystyle\iint_{D_r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 2\pi \int_0^r \rho\, m(a,b,\rho)\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\, f(a,b) \int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho = \pi\, r^2\, f(a,b)$,
d'où $M(a,b,r) = f(a,b)$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ possède la propriété de moyenne circulaire sur } \mathcal{P}, \text{ elle possède la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}.}$$

3°) Si $f$ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$, et

$$\forall r \in ]0,b[,\ \frac{\partial M}{\partial r}(a,b,r) = 0.$$

En utilisant le **III** 5°), il en résulte que pour tout $r$ de $]0,b[$, $m(a,b,r) = M(a,b,r) = f(a,b)$, donc $f$ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.

$$\boxed{\text{La réciproque de la propriété précédente est vraie.}}$$

4°) Montrons que si $f$ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, il en va de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{P}$.
D'après ce qui précède, $f$ vérifie aussi la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$.
Soit $b > 0$ et $r \in ]0,b[$ fixés. Par composition, l'application $(a,\theta) \mapsto f(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0,2\pi]$, donc, grâce au théorème de dérivation des intégrales propres à paramètre, l'application $a \mapsto m(a,b,r) = \dfrac{1}{2\,\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée s'obtient par la règle de Leibniz, et en notant $D_1 m$ la dérivée partielle de $(a,b,r) \mapsto m(a,b,r)$ par rapport à sa première variable, on obtient :

$$D_1 m(a,b,r) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Or, pour tout $(a,b)$ de $\mathcal{P}$, et tout $r$ de $]0,b[$, $m(a,b,r) = f(a,b)$, donc $D_1 m(a,b,r) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.
On a ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\,\cos\theta, b + r\,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

ce qui signifie que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ possède la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, donc aussi la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.
On procède de même pour démontrer que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ possède la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}, \text{ il en va de même pour ses dérivées partielles d'ordre 1.}}$$

En itérant cette propriété, on montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ vérifient aussi la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$.
Enfin, par linéarité de l'intégrale double,
$\dfrac{1}{\pi\, r^2} \displaystyle\iint_{D_r} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u,v) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u,v)\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$, donc $\Delta f$ la vérifie aussi.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur } \mathcal{P}, \text{ il en va de même pour } \Delta f.}$$

5°) Si $f$ vérifie la propriété de moyenne circulaire sur $\mathcal{P}$, alors pour tout $(a,b)$ de $\mathcal{P}$, et tout $r$ de $]0,b[$, $\dfrac{\partial m}{\partial r}(a,b,r) = 0$. D'après le **III** 4°), cela implique

$$\boxed{\iint_{D_r} \Delta f(u,v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0.}$$

D'après la question précédente, $\Delta f$ vérifie la propriété de moyenne spatiale sur $\mathcal{P}$, donc pour tout $(a,b)$ de $\mathcal{P}$, et tout $r$ de $]0,b[$, $\dfrac{1}{\pi\, r^2} \displaystyle\iint_{D_r} \Delta f(u,v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \Delta f(a,b)$.
On a donc : pour tout $(a,b)$ de $\mathcal{P}$, $\Delta f(a,b) = 0$, et

$$\boxed{f \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}.}$$