Épreuve 1A du concours PT de 2001

1 Première partie

1.1 Comparaison de $K(x,y)$ et de $K(y,x)$

$K(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ si $x < y$,
$K(x,y) = \cos(x)\sin(x)$ si $x = y$ et
$K(x,y) = \cos(x)\sin(y)$ si $x > y$.
Donc $K(x,y) = K(y,x)$ si $(x,y) \in C$.

K est continue sur C

La restriction de K à la région de C où $x > y$ est évidemment continue (c'est $\sin(x)\cos(y)$). La restriction de K à la région de C où $x < y$ est évidemment continue (c'est $\sin(y)\cos(x)$).
Montrons que K est continue en tout (x_0, x_0) de C. Il y a trois cas à examiner.
D'abord, si (x,y) est tel que $x \leq y$, posons $x = x_0 + h$ et $y = x_0 + k$. Alors :

$$|\sin(x)\cos(y) - \sin(x_0)\cos(x_0)| = |\sin(x_0+h)\cos(x_0+k) - \sin(x_0)\cos(x_0)|$$

Quand $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers 0, h et k tendent vers 0 et donc $\sin(x_0+h)\cos(x_0+k)$ tend vers $\sin(x_0)\cos(x_0)$.
Même démonstration pour les cas $x > y$ et $x = y$.

1.2 φ_y appartient à E

$\varphi_y(x) = \sin(x)\cos(y)$ si $0 \leq x \leq y$ et $\varphi_y(x) = \sin(y)\cos(x)$ si $y < x \leq \frac{\pi}{2}$.
φ_y est la restriction d'une fonction continue de deux variables et est donc continue.

Dérivabilité de φ_y

φ_0 et $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$ sont égales à la fonction nulle donc dérivables.
Étudions le cas où $0 < y < \frac{\pi}{2}$.
Comme φ_y restreinte à $[0,y]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la dérivée à gauche de φ_y en y est aussi $\lim_{\substack{x \to y \\ x < y}} \varphi_y'(x)$.

Comme pour $0 \leq x \leq y$, $\varphi_y(x) = \cos(y)\sin(x)$, $\varphi'_y(x) = \cos(y)\cos(x)$ et donc

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} \varphi'_y(x) = \cos^2(y)$$

De même, la dérivée à droite de φ_y en y est aussi $\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} \varphi'_y(x)$.
Comme pour $y \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\varphi_y(x) = \cos(x)\sin(y)$, $\varphi'_y(x) = -\sin(y)\sin(x)$ et donc

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} \varphi'_y(x) = -\sin^2(y)$$

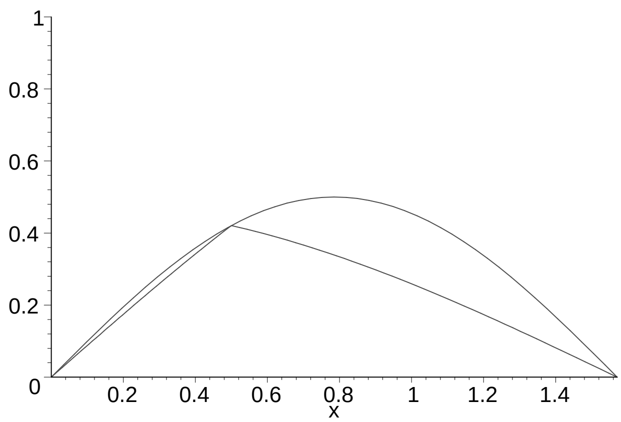
Donc φ_y n'est pas dérivable en y si $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

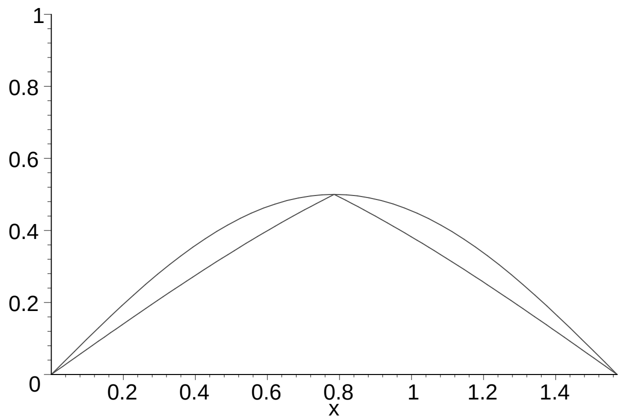
Étude des variations de φ_y

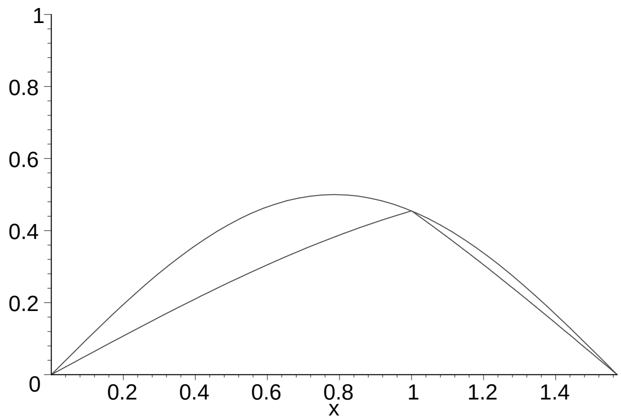
Nous avons déjà vu que φ_0 et $\varphi_{\frac{\pi}{2}}$ étaient égales à la fonction nulle.
D'après les études précédentes, pour $0 < y < \frac{\pi}{2}$, le tableau de variations de φ_y a la forme :

x	0		y		$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'_y(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$\varphi_y(x)$	0	$\nearrow$	$\sin(y)\cos(y)$	$\searrow$	0

Voici les tracés de $\varphi_{0.5}$, $\varphi_{\frac{\pi}{4}}$, $\varphi_{1.0}$, avec la courbe des maxima (question suivante).







1.3 Minimum et maximum de K

m est défini par par :

$$m = \inf_{(x,y)\in C} K(x,y) = \inf_{y\in[0,\pi/2]} (\inf_{x\in[0,\pi/2]} \varphi_y(x))$$

et donc $m = 0$ et ce minimum est atteint sur les bords de C.
M est défini par par :

$$M = \sup_{(x,y)\in C} K(x,y) = \sup_{y\in[0,\pi/2]} (\sup_{x\in[0,\pi/2]} \varphi_y(x))$$

$\sup_{x\in[0,\pi/2]} \varphi_y(x) = \sin(y)\cos(y)$, qui est obtenu pour $x = y$, d'après les questions précédentes. Donc :

$$M = \sup_{(x,y)\in C} K(x,y) = \sup_{y\in[0,\pi/2]} \frac{1}{2}\sin(2y)) = \frac{1}{2}$$

qui est obtenu pour $x = y = \frac{\pi}{4}$.
En résumé : $m = 0$, $M = \frac{1}{2}$.

1.4 Volume limité par le plan $z = 0$ et la surface $z = K(x, y)$

Le volume cherché est :

$$\mathcal{V} = \int_C K(x,y)\ dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \int_0^x \sin(y)\ dy\ dx$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)[-\cos(y)]_0^x\ dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)[1-\cos(x)]\ dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\ dx \\
&= 2 - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{1+\cos(2x)}{2}\Big)\ dx \\
&= 2 - \Big[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathcal{V} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

1.5 Coefficients de Fourier de ψ_y

Comme ψ_y est impaire, les coefficients a_n sont tous nuls.
Pour tout n entier ≥ 1,

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_y(t)\sin(2nt)\ dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^y \cos(y)\sin(t)\sin(2nt)\ dt + \frac{4}{\pi}\int_y^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\cos(t)\sin(2nt)\ dt \\
&= \frac{4}{\pi}\cos(y)\int_0^y \sin(t)\sin(2nt)\ dt + \frac{4}{\pi}\sin(y)\int_y^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(2nt)\ dt
\end{aligned}$$

Calcul de $\int_0^y \sin(t)\sin(2nt)\ dt$:

$$\sin(t)\sin(2nt) = \frac{1}{2}\cos(2n-1)t - \frac{1}{2}\cos(2n+1)t$$

$$\begin{aligned}
\int_0^y \sin(t)\sin(2nt)\ dt &= \frac{1}{2(2n-1)}\Big[\sin(2n-1)t\Big]_0^y - \frac{1}{2(2n+1)}\Big[\sin(2n+1)t\Big]_0^y \\
&= \frac{1}{2(2n-1)}\sin(2n-1)y - \frac{1}{2(2n+1)}\sin(2n+1)y
\end{aligned}$$

Calcul de $\int_y^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(2nt)\ dt$:

$$\cos(t)\sin(2nt) = \frac{1}{2}\sin(2n-1)t + \frac{1}{2}\sin(2n+1)t$$

$$\begin{aligned}
\int_y^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(2nt)\ dt &= \frac{1}{2(2n-1)}\Big[-\cos(2n-1)t\Big]_y^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2(2n+1)}\Big[-\cos(2n+1)t\Big]_y^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2(2n-1)}\cos(2n-1)y + \frac{1}{2(2n+1)}\cos(2n+1)y
\end{aligned}$$

Nous en déduisons pour b_n :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2\cos(y)}{(2n-1)}\sin(2n-1)y - \frac{2\cos(y)}{(2n+1)}\sin(2n+1)y \\
&\qquad + \frac{2\sin(y)}{(2n-1)}\cos(2n-1)y + \frac{2\sin(y)}{(2n+1)}\cos(2n+1)y \\
&= \frac{2}{\pi(2n-1)}\sin(2ny) - \frac{2}{\pi(2n+1)}\sin(2ny) \\
&= \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\sin(2ny)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$b_n = \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\sin(2ny)$$

et le développement en série de Fourier de ψ_y est, pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, pour tout y dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ (ψ_y est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) :

$$\psi_y(x) = \varphi_y(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nx \sin 2ny$$

Autrement dit, pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, pour tout y dans $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$K(x,y) = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}\sin 2nx \sin 2ny$$

à cause de la définition de φ_y.

2 Deuxième partie

2.1 $L : f \mapsto Lf$ est un endomorphisme de E

$$Lf(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f(t)\ dt$$

La fonction $(x,t) \mapsto K(x,t)f(t)$ est continue sur C, et donc la fonction $x \mapsto Lf(x)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: Lf appartient donc à E.
Soit λ un réel et soient f_1 et f_2 des éléments de E.
Pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\begin{aligned} L(\lambda f_1 + f_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)(\lambda f_1(t) + f_2(t))\ dt \\ &= \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f_1(t)\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f_2(t)\ dt \\ &= \lambda Lf_1(x) + Lf_2(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$L(\lambda f_1 + f_2) = \lambda Lf_1 + Lf_2$$

L est un endomorphisme de E.

2.2 Calcul de $Lf(x)$

$$\begin{aligned} Lf(x) &= \int_0^x K(x,t)f(t)\ dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f(t)\ dt \\ &= \int_0^x \cos(x)\sin(t)f(t)\ dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(t)f(t)\ dt \\ &= \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt + \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)f(t)\ dt \end{aligned}$$

Lf est de classe $\mathcal{C}^2$

D'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\begin{aligned} (Lf)'(x) &= -\sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt + \cos(x)\sin(x)f(x) \\ &\qquad + \cos(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)f(t)\ dt - \sin(x)\cos(x)f(x) \\ &= -\sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt + \cos(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)f(t)\ dt \end{aligned}$$

Une deuxième application du théorème fondamental de l'analyse montre que $(Lf)'$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc que Lf est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2.3 Calcul de $(Lf)''$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
(Lf)''(x) &= -\cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt - \sin^2(x)f(x) \\
&\qquad -\sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)f(t)\ dt - \cos^2(x)f(x) \\
&= -\int_0^x \cos(x)\sin(t)f(t)\ dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(t)f(t)\ dt - f(x) \\
&= -Lf(x) - f(x)
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu :

$$(Lf)'' = -Lf - f$$

Valeurs de $(Lf)(0)$ et de $(Lf)(\frac{\pi}{2})$

$$(Lf)(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(0,t)f(t)\ dt = 0$$

$$(Lf)(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\frac{\pi}{2},t)f(t)\ dt = 0$$

2.4 Noyau de L

On cherche les f de E telles que

$$Lf(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f(t)\ dt = 0$$

pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Si Lf est la fonction nulle, $(Lf)'$ et $(Lf)''$ aussi.
D'après la question précédente :

$$(Lf)'' = -Lf - f$$

et donc f est la fonction nulle. Le noyau de L est réduit à l'ensemble qui ne contient que la fonction nulle. Donc L est injective (c'est du cours, et c'est très facile : $Lf_1 = Lf_2$ si et seulement si $L(f_1 - f_2) = 0$, donc si et seulement si $f_1 = f_2$).

Surjectivité de L

Comme $Lf(0) = Lf(\frac{\pi}{2}) = 0$, il est impossible d'avoir un antécédent pour une fonction continue g de C telle que $Lf(0)$ ou $Lf(\frac{\pi}{2})$ soit non nul.
L n'est pas surjective.

2.5 Étude de $Lf = \lambda f$

Si $Lf = \lambda f$,

$$\begin{array}{rcl} (Lf)''(x) & = & \lambda f''(x) \\ & = & -Lf(x) - f(x) \\ & = & -\lambda f(x) - f(x) \end{array}$$

donc :

$$\lambda f''(x) + (\lambda + 1) f(x) = 0$$

$$\lambda f'' + (\lambda + 1) f = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre. Nous cherchons donc les zéros de $\lambda r^2 + (\lambda + 1)$.

Valeurs propres et vecteurs propres de L

Si $-1 < \lambda < 0$,

$$-\frac{\lambda + 1}{\lambda} > 0$$

donc pour les réels λ de $]-1, 0[$, les fonctions propres possibles sont :

$$x \mapsto \exp(\sqrt{-\frac{\lambda + 1}{\lambda}} x)$$

et

$$x \mapsto \exp(-\sqrt{-\frac{\lambda + 1}{\lambda}} x).$$

Mais comme, (voir question 2.3), $Lf(0) = 0$ et $Lf(\frac{\pi}{2}) = 0$, ces fonctions ne peuvent être propres.
Donc il n'y a pas de valeurs propres dans $]-1, 0[$.
Si $\lambda < -1$ ou $\lambda > 0$,

$$-\frac{\lambda + 1}{\lambda} < 0$$

donc pour les réels λ de $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, les fonctions propres possibles sont :

$$x \mapsto \cos(\sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda}} x)$$

et

$$x \mapsto \sin(\sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda}} x).$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, les seules fonctions propres possibles sont :

$$x \mapsto \sin(\sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda}} x)$$

à la condition que $\sin(\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\frac{\pi}{2}) = 0$ et donc qu'il existe n entier relatif tel que :

$$\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\frac{\pi}{2} = n\pi$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\frac{1}{2} = n$$

$$\frac{\lambda+1}{\lambda} = 4n^2$$

$$\lambda + 1 = 4n^2\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{4n^2-1}$$

Nous devons maintenant vérifier que

$$Lf = \lambda f$$

pour cette fonction f :

$$f(t) = \sin(2nt)$$

(car $\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}} = 2n$). D'après la question 2.2 :

$$Lf(x) = \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt + \sin(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)f(t)\ dt$$

C'est exactement le calcul déjà fait quand nous avons cherché b_n dans la question 1.5. On obtient donc

$$Lf(x) = \frac{1}{4n^2-1}\sin(2nx).$$

Donc les valeurs propres de $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ sont les réels > 0 :

$$\lambda = \frac{1}{4n^2-1},$$

n entier relatif différent de 0, et les fonctions propres correspondantes sont les fonctions

$$x \mapsto \sin(2nx).$$

Si $\lambda = -1$, les fonctions propres possibles sont :

$$x \mapsto 1$$

et

$$x \mapsto x$$

qui ne conviennent pas pour les mêmes raisons que ci-dessus.

3 Troisième partie

3.1 Équation différentielle (Eq) $\quad y'' + y = x + 1$

Comme $x \mapsto x+1$ est solution évidente de l'équation différentielle, la solution générale de (Eq) est y telle que

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + x + 1$$

où A et B sont des constantes réelles.

Solutions de (Eq) telles que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$

$y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ est équivalent aux conditions $A + 1 = 0$ et $B + \frac{\pi}{2} + 1 = 0$.
Il y a donc une solution unique vérifiant $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Solutions de (Eq) telles que $y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + 1$.
$y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ est donc équivalent aux conditions $A+1 = 0$ et $-A+1 = 0$.
Il n'y a pas de solution vérifiant $y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3.2 F_n est un sous espace de E stable par dérivation

Soit y de F_n :

$$y(x) = P_1(x)\cos(x) + P_2(x)\sin(x)$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

$$\begin{aligned} y'(x) &= P_1'(x)\cos(x) - P_1(x)\sin(x) + P_2'(x)\sin(x) + P_2(x)\cos(x) \\ &= [P_1'(x) + P_2(x)]\cos(x) + [-P_1(x) + P_2'(x)]\sin(x) \end{aligned}$$

$[P_1'(x)+P_2(x)]$ et $[-P_1(x)+P_2'(x)]$ sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n, donc F_n est stable par dérivation. D'autre part F_n est évidemment un espace vectoriel.

Calcul de $y'' + y$

$$\begin{aligned} y''(x) = [P_1'(x) + P_2(x)](-\sin(x)) + [P_1''(x) + P_2'(x)]\cos(x) \\ +[-P_1(x)+P_2'(x)]\cos(x)+[-P_1'(x)+P_2''(x)]\sin(x) \end{aligned}$$

Comme

$$y(x) = P_1(x)\cos(x) + P_2(x)\sin(x)$$

$$y'' + y = [P_1''(x) + 2P_2'(x)]\cos(x) + [P_2''(x) - 2P_1'(x)]\sin(x)$$

qui appartient à F_{n-1}.

3.3 Solution de (Eq) appartenant à F_n

Nous cherchons une solution particulière de $y''(x) + y(x) = (x-1)\sin(x)$ appartenant à F_n. D'après le paragraphe précédent on doit chercher des solutions dans F_2. Cela résulte aussi du cours, puisque

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

et puisque i et $-i$ sont zéros simples de $r^2 + 1$.

$$y(x) = (ax^2 + bx)\cos(x) + (cx^2 + dx)\sin(x)$$

$$y'(x) = (2ax+b)\cos(x) - (ax^2+bx)\sin(x) + (2cx+d)\sin(x) + (cx^2+dx)\cos(x)$$

$$y''(x) = 2a\cos(x) - 2(2ax+b)\sin(x) - (ax^2+bx)\cos(x)$$
$$+2c\sin(x) + 2(2cx+d)\cos(x) - (cx^2+dx)\sin(x)$$

$$\begin{array}{rcl} y''(x) + y(x) & = & 2a\cos(x) - 4ax\sin(x) - 2b\sin(x) + 2c\sin(x) + 4cx\cos(x) + 2d\cos(x) \\ & = & (2a + 4cx + 2d)\cos(x) + (-4ax - 2b + 2c)\sin(x) \end{array}$$

$y''(x) + y(x) = (x-1)\sin(x)$ impose donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4c & = & 0 \\ 2a + 2d & = & 0 \\ -4a & = & 1 \\ -2b + 2c & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & 0 \\ a & = & -1/4 \\ d & = & 1/4 \\ b & = & 1/2 \end{array} \right.$$

La solution générale de (Eq) est donc :

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + (-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x)\cos(x) + \frac{1}{4}x\sin(x)$$

Solutions telles que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$

$y(0) = A$ et $y(\frac{\pi}{2}) = B + \frac{\pi}{8}$.
Il y a donc une solution unique satisfaisant à $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Solutions telles que $y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) + (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})\cos(x) - (-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x)\sin(x) + \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}x\cos(x)$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = -A + (\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{4}$$

Il n'y a donc pas de solution satisfaisant à $y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

3.4 Calcul de A et B

A et B satisfont à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A(x)\cos(x) & + & B(x)\sin(x) & = & y(x) \\ A'(x)\cos(x) & + & B'(x)\sin(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme y satisfait à $y''(x) + y(x) = f(x)$, en dérivant deux fois, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} y'(x) & = & -A(x)\sin(x) + B(x)\cos(x) + A'(x)\cos(x) + B'(x)\sin(x) \\ & = & -A(x)\sin(x) + B(x)\cos(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} y''(x) & = & -A(x)\cos(x) - B(x)\sin(x) - A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) \\ & = & -y + A'(x)\sin(x) + B'(x)\cos(x) \end{array}$$

et donc, finalement, si y est solution de $y'' + y = f$, alors A et B satisfont à :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} A'(x)\cos(x) & + & B'(x)\sin(x) & = & 0 \\ -A'(x)\sin(x) & + & B'(x)\cos(x) & = & f(x) \end{array} \right.$$

En résolvant ce système de deux équations aux deux inconnues A' et B', nous en déduisons :

$$B'(x) = f(x)\cos(x)$$

$$B(x) = \int_0^x f(t)\cos(t)\ dt + C_2$$

et :

$$A'(x) = -f(x)\sin(x)$$

$$A(x) = -\int_0^x f(t)\sin(t)\ dt + C_1$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Expression de y

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & -\cos(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\sin(t)\ dt + C_1\cos(x) + \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\ dt + C_2\sin(x) \\ & = & \displaystyle\int_0^x f(t)[\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)]\ dt + C_1\cos(x) + C_2\sin(x) \end{array}$$

Finalement, $y(x)$, pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, peut être écrit :

$$y(x) = \int_0^x \sin(x-t)f(t)\ dt + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

Solution générale de (Eq)

Comme la fonction

$$x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)f(t)\ dt$$

est une solution particulière de (Eq) et comme la fonction

$$x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$$

est solution générale de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, on a obtenu ci-dessus la solution générale de l'équation différentielle (Eq).

3.5 Solutions de (Eq) telles que $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$

On remplace x successivement par 0 et par $\frac{\pi}{2}$ dans l'expression de $y(x)$ obtenue dans la question 3.4 :

$$y(0) = C_1$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(\frac{\pi}{2} - t)\ dt + C_2$$

Donc il faut et il suffit de prendre :

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(\frac{\pi}{2} - t)\ dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(t)\ dt$$

Nous pouvons donc réécrire la solution $y_0(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \int_0^x \sin(x-t)f(t)\ dt - \sin(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos(t)\ dt \\ &= \int_0^x \sin(x)\cos(t)f(t)\ dt - \int_0^x \sin(t)\cos(x)f(t)\ dt \\ &\qquad - \int_0^x \sin(x)\cos(t)f(t)\ dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(t)f(t)\ dt \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f(t)\ dt \end{aligned}$$

Finalement

$$y_0(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,t)f(t)\ dt$$

3.6 Solutions de (Eq) telles que $y(0) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

Nous avons vu dans la question précédente que

$$y(0) = C_1$$

et donc qu'il fallait prendre

$$C_1 = 0.$$

Comme

$$y(x) = \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\ dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt + C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$$

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\ dt + \sin(x)\cos(x)f(x) \\
&\qquad + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt - \cos(x)\sin(x)f(x) - C_1\sin(x) + C_2\cos(x) \\
&= \cos(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\ dt + \sin(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt - C_1\sin(x) + C_2\cos(x)
\end{aligned}$$

$$y'(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(t)\ dt - C_1$$

Nous avons vu que $y(0) = 0$ imposait $C_1 = 0$, donc $y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ impose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(t)\ dt = 0.$$

Réciproquement, il est facile de voir que ces conditions sont suffisantes.

Étude de y_1

Comme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(t)\ dt = 0.$$

on peut écrire $y_1(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\ dt - \cos(x)\int_0^x \sin(t)f(t)\ dt + C_2\sin(x) \\
&\qquad + \cos(x)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(t)\ dt \\
&= \sin(x)\int_0^x \cos(t)f(t)\ dt + \cos(x)\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(t)\ dt + C_2\sin(x) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(x,t)f(t)\ dt + C_2\Phi(x)
\end{aligned}$$

où H est la fonction définie sur C par

$$H(x,y) = \begin{cases} \sin(x)\cos(y) & \text{si} \quad x \geq y \\ \cos(x)\sin(y) & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

et $\Phi(x) = \sin(x)$.

Annexe

Procédure pour Maple V faisant les dessins pour la question 1.2. Lancer la procédure avec pour paramètre le y de φ_y.

```
> dessin_phi:=proc(yp)
>    local y_num,pi_2,des1,des2,des3;
> y_num:=evalf(yp);
> pi_2:=evalf(Pi/2);
> des1:=plot(cos(y_num)*sin(x),x=0..y_num,y=0..1,scaling=CONSTRAINED):
> des2:=plot(sin(y_num)*cos(x),x=y_num..pi_2):
> des3:=plot(sin(2*x)/2,x=0..pi_2):
> plots[display]({des1,des2,des3});
> end:
```