Banque PT — 2007 — épreuve A

Partie I

Question I.1
On trouve $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

Question I.2
On montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $\mathcal{P}_n$: $\deg T_n = n$ **et** $\operatorname{dom} T_n = 2^{n-1}$.
C'est vrai aux rangs 2 et 3. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ sera de degré $1 + \deg T_n = n + 1$ et de coefficient dominant $2 \operatorname{dom} T_n = 2^n$.
La récurrence s'enclenche !
Finalement :

$$\forall n \geqslant 0, \deg T_n = n \quad \text{et} \quad \operatorname{dom} T_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0; \\ 2^{n-1}, & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Question I.3
Une récurrence analogue permet de montrer que T_n est de la parité de n : c'est une fonction paire *(resp. impaire)* si n est pair *(resp. impair)*.

Question I.4
$T_0(1) = T_1(1) = 1$. Supposant démontrée jusqu'au rang n la relation $T_n(1) = 1$, on trouve que $T_{n+1}(1) = 2.1.T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2 - 1 = 1$. La récurrence s'enclenche : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$.
D'après le résultat sur la parité, on en déduit que $T_n(-1) = +1$ si n est pair, et $T_n(-1) = -1$ si n est impair. On peut écrire aussi : $T_n(-1) = (-1)^n$.
On a $T_0(0) = 1$ et $T_1(1) = 0$. L'imparité de T_n pour n impair prouve que $T_n(0) = 0$ si n est impair. Alors $T_{2p+2}(0) = -T_{2p}(0)$, or $T_0(0) = 1$, donc, par une récurrence évidente : $T_{2p}(0) = (-1)^p$.

Question I.5
Montrons tout d'abord que T_n vérifie l'équation, par récurrence sur n.
La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$: $1 = \cos 0$ et $\cos\theta = \cos\theta$.
Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang n. Alors, pour tout réel θ, on dispose , d'après l'hypothèse de récurrence, de :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \\ &= \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta - \cos(n-1)\theta = \cos(n+1)\theta, \end{aligned}$$

et la récurrence s'enclenche.
Il faut encore montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie cette propriété. Mais si T était un autre polynôme qui vérifiait aussi cette propriété, on aurait, pour tout réel θ, $T_n(\cos\theta) = T(\cos\theta)$.
Autrement dit, puisque le cosinus varie dans $[-1, +1]$, on aurait deux polynômes, T_n et T, qui coïncideraient en toute valeur de $[-1, +1]$. Deux polynômes qui coïncident sur une infinité de points sont égaux : donc $T_n = T$, et l'unicité est démontrée.

Question I.6
I.6.a On écrit $T_n(\cos\theta) = 0 \iff \cos n\theta = 0 \iff \theta = \dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$, où $k \in \mathbb{Z}$.
I.6.b Le polynôme T_n est de degré n : il a donc au plus n racines distinctes. Or le calcul précédent montre que $\alpha_k = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ est racine de T_n, pour tout entier k.
Or, quand k décrit $\{0, 1, \cdots, n-1\}$, les angles $\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}$ sont deux à deux distincts et dans l'intervalle $[0, \pi]$, où la fonction cosinus est strictement décroissante. C'est dire que les α_k correspondants sont deux à deux distincts : comme ils sont exactement au nombre de n, ce sont bien les racines du polynôme T_n, qui est donc scindé.
I.6.c En dérivant l'équation qui caractérise T_n, on trouve

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, -\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin n\theta.$$

T_n' est de degré $n-1$ et a donc $n-1$ racines au plus. Or si je pose dans l'équation ci-dessous $\theta = \dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ (ce qui fait bien $n-1$ angles distincts de l'intervalle $[0, \pi]$), j'obtiens $T_n'(\cos\theta) = 0$.

On peut donc affirmer que les racines de T_n' sont exactement les $\cos\dfrac{k\pi}{n}$, pour $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Ces racines sont également dans l'intervalle $[-1, +1]$.

Partie II

Question II.1
On aura reconnu la définition d'une norme.
La deuxième propriété est évidente, aussi bien pour L que pour N.
Les implications $P = 0 \Rightarrow L(P) = 0$ et $P = 0 \Rightarrow N(P) = 0$ sont claires. Réciproquement, si $L(P) = 0$, c'est que $P(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, donc que $P = 0$ car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. De même si $N(P) = 0$, c'est que tous les coefficients de P sont nuls, donc que $P = 0$.
Démontrons l'inégalité triangulaire pour L : pour tout réel t de $[-1, +1]$, on dispose de $|(P+Q)(t)| \leqslant |P(t)| + |Q(t)| \leqslant \max|P(t)| + \max|Q(t)| = L(P) + L(Q)$. Cette majoration est vraie pour tout t, donc on en déduit que $L(P+Q) = \max|(P+Q)(t)| \leqslant L(P) + L(Q)$.
Terminons avec N : si $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, on a $P + Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$ (on a choisi n égal au maximum des degrés de P et Q, quitte à ajouter des coefficients nuls pour des termes qui figureraient dans un polynôme mais pas dans l'autre).
Alors comme $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k|$, passant aux max, on obtient là encore $N(P+Q) \leqslant N(P) + N(Q)$.

Question II.2

Si $-1 \leqslant t \leqslant 1$, on a $|t^k| \leqslant 1$ pour tout exposant $k \geqslant 0$. Ainsi $|P(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k t^k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leqslant (n+1)N(P)$.
On en déduit que $L(P) \leqslant (n+1)N(P)$.

Question II.3
Le polynôme $Q = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$ vérifie bien $L(Q) = n + 1 = (n+1)N(Q)$.
On ne peut donc pas faire meilleure majoration que celle du II.2.

Question II.4
Tout réel $t \in [-1, +1]$ peut s'écrire $t = \cos\theta$ avec $\theta = \arccos t$. Alors $T_n(t) = \cos n\theta$ donc $|T_n(t)| \leqslant 1$. On en déduit que $L(T_n) \leqslant 1$.
Mais on a vu que $T_n(1) = 1$, donc cette valeur est atteinte pour $t = 1$ et finalement $L(T_n) = 1$.

Question II.5

La bilinéarité et la symétrie de φ sont claires. De même $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_0^\pi P^2(\cos\theta)\,d\theta \geqslant 0$.
Il reste à prouver que $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$. Mais comme $\theta \mapsto P^2(\cos\theta)$ est positive et continue sur $[0, \pi]$, dire que $\varphi(P, P) = 0$ entraîne que $P(\cos\theta)$ est constante nulle sur $[0, \pi]$, ce qui fournit une infinité de racines au polynôme P, qui est donc forcément nul.

Question II.6
On a $\varphi(T_0, T_0) = \pi$.
Pour $n \geqslant 1$, on écrit

$$\varphi(T_n, T_n) = \int_0^\pi T_n^2(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \cos^2 n\theta\,d\theta = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2n\theta}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin 2n\theta}{4n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, pour $n \neq m$, on écrit

$$\varphi(T_n, T_m) = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta\,d\theta = \int_0^\pi \frac{\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{\sin(n+m)\theta}{2(n+m)} + \frac{\sin(n-m)\theta}{2(n-m)}\right]_0^\pi = 0.$$

Cela revient à dire que $(T_0, T_1, T_2, \cdots, T_n)$ forme une base orthogonale (mais pas orthonormée) de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question II.7
Les réels α_k cherchés sont les coordonnées de P dans cette base. On utilise le fait qu'elle soit orthogonale :

$$\varphi(P,T_0) = \alpha_0\varphi(T_0,T_0) = \pi\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\varphi(P,T_0)$$
$$\varphi(P,T_k) = \alpha_k\varphi(T_k,T_k) = \frac{\pi}{2}\alpha_k \Rightarrow \alpha_k = \frac{2}{\pi}\varphi(P,T_k)$$

pour $k \geqslant 1$.
Or on observe que pour tout k, on dispose de $|\varphi(P,T_k)| \leqslant \int_0^\pi |P(\cos\theta)|\,|T_k(\cos\theta)|\,d\theta \leqslant \int_0^\pi L(P)\times 1\,d\theta = \pi L(P)$.
On en déduit que $|\alpha_0| \leqslant L(P) \leqslant 2L(P)$ et, pour $k \geqslant 1$, $|\alpha_k| \leqslant 2L(P)$.

Question II.8
La relation $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ fournit $N(T_{n+1}) \leqslant 2N(XT_n) + N(T_{n-1})$ grâce aux propriétés de la norme N.
Or $N(XT_n) = N(T_n)$ car T_n et XT_n ont les mêmes coefficients (décalés d'un rang). Finalement : $N(T_{n+1}) \leqslant 2N(T_n) + N(T_{n-1})$.

Question II.9
On raisonne par récurrence sur n. Observons tout d'abord : $N(T_0) = 1 = q^0$; $N(T_1) = 1 \leqslant q^1$.
Supposons la majoration vérifiée jusqu'au rang n. On écrit alors

$$N(T_{n+1}) \leqslant 2N(T_n) + N(T_{n-1}) \leqslant 2q^n + q^{n-1} = q^{n-1}(2q+1) = q^{n-1}q^2 = q^{n+1},$$

puisque $q^2 = 3 + 2\sqrt{2} = 2q + 1$. La récurrence s'enclenche et on a bien : $\forall n \geqslant 0, N(T_n) \leqslant q^n$.

Question II.10
Comme $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$, on en déduit que

$$N(P) \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| N(T_k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2L(P)q^k = 2L(P)\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = (q^{n+1}-1)\sqrt{2}L(P) \leqslant q^{n+1}\sqrt{2}L(P).$$

Partie III

Question III.1
La linéarité de Φ est évidente. En outre si $\deg P \leqslant n$, $\deg P' \leqslant n-1$ donc $\deg(XP') \leqslant n$, $\deg P'' \leqslant n-2$ donc $\deg((X^2-1)P'') \leqslant n$: finalement $\deg \Phi(P) \leqslant n$ et Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question III.2
On a $\Phi(1) = 0$ et $\Phi(X) = X$, puis, pour $k \geqslant 2$, $\Phi(X^k) = (X^2-1).k(k-1)X^{k-2} + X.kX^{k-1} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$.
On en déduit que $1 \in \operatorname{Ker}\Phi$, donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\Phi$.
Montrons qu'il y a égalité. Il suffit d'observer que $(\Phi(X), \Phi(X^2), \dots, \Phi(X^n))$ est composé de polynômes de degrés échelonnés et est donc un système libre de vecteurs de $\operatorname{Im}\Phi$. On en déduit que $\operatorname{rg}\Phi = \dim \operatorname{Im}\Phi \geqslant n$ donc que $\dim \operatorname{Ker}\Phi = n + 1 - \operatorname{rg}\Phi \leqslant 1$.
Finalement $\operatorname{rg}\Phi = n$ et $\operatorname{Ker}\Phi = \mathbb{R}_0[X]$ (c'est le sous-espace des polynômes constants).

Question III.3
La matrice demandée s'écrit (les termes non écrits sont nuls) :

$$A = \operatorname{Mat}_{cano}\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\times 2 & & & & \\ & 1 & 0 & -2\times 3 & & & \\ & & 2^2 & 0 & \ddots & & \\ & & & 3^2 & \ddots & -(n-2)(n-1) & \\ & & & & \ddots & 0 & -(n-1)n \\ & & & & & (n-1)^2 & 0 \\ & & & & & & n^2 \end{pmatrix}.$$

Question III.4

Alors $\operatorname{tr}\Phi = 0 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Question III.5

La matrice A est triangulaire supérieure : les valeurs propres sont les termes diagonaux.
Donc $\operatorname{Sp}\Phi = \{0, 1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2\}$. Φ possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes : elle est donc diagonalisable. En outre on sait déjà que chaque espace propre est une droite vectorielle.

Question III.6

On a déjà trouvé $E_0(\Phi) = \operatorname{Vect}(1) = \operatorname{Vect}(T_0)$.
On observe que $\Phi(X) = X$ donc $E_1(\Phi) = \operatorname{Vect}(X) = \operatorname{Vect}(T_1)$.
Soit $k \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a déjà écrit $T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$, $\sin\theta T'(\cos\theta) = k\sin k\theta$. En dérivant une nouvelle fois, il vient : $\cos\theta T'(\cos\theta) - \sin^2\theta T''(\cos\theta) = k^2\cos k\theta$, ce qu'on peut réécrire

$$\cos\theta T'(\cos\theta) + (\cos^2\theta - 1)T''(\cos\theta) = k^2 T_k(\cos\theta).$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi $\forall\theta \in \mathbb{R}, \Phi(T_k)(\cos\theta) = k^2 T_k(\cos\theta)$. Cela montre que les polynômes $\Phi(T_k)$ et k^2T_k coïncident sur tout l'intervalle $[-1, +1]$, donc sont égaux : on a bien montré que $\Phi(T_k) = k^2T_k$ donc que $E_k(\Phi) = \operatorname{Vect}(T_k)$.