Banque PT 2009 — épreuve A

Partie I

Question I.1

On vérifie que $M^2 = M$, ce qui prouve que f est un projecteur. En outre $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} f = 1$ car les deux colonnes de la matrice sont proportionnelles.
Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f = 2 - 1 = 1$. L'image de f est $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et on trouve facilement que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Question I.2

Une équation du plan P est, dans la base $\mathcal{B}$, $\begin{vmatrix} x & 1 & 2\\ y & 0 & -1\\ z & -1 & 0\end{vmatrix} = 0 \iff x + 2y + z = 0$.
Soit $\vec{u} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et $\vec{u}' = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ son image dans le projecteur sur P parallèlement à D : on écrit que $\vec{u}' \in P$ et $\vec{u}' - \vec{u} \in D$, ce qui fournit :

$$\exists t \begin{cases} x' + 2y' + z' = 0\\ x' - x = t\\ y' - y = 3t\\ z' - z = -t\end{cases} \iff \exists t \begin{cases} x' = x + t, y' = y + 3t, z' = z - t\\ x + 2y + z + 6t = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x' = x - \dfrac{x+2y+z}{6}\\ y' = y - 3\dfrac{x+2y+z}{6}\\ z' = z + \dfrac{x+2y+z}{6}\end{cases}$$

et finalement la matrice demandée est $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1\\ -3 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$.

Question I.3

On suppose $p \circ p = p$. Alors si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$, $p(x) = 0$ et il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$. Mais alors $x = p(x') = p(p(x')) = p(x) = 0$ et on a prouvé que $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$: les deux sous-espaces sont en somme directe.
Enfin tout vecteur x s'écrit $x = (x - p(x)) + p(x)$ où bien sûr $p(x) \in \operatorname{Im} p$. Mais $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0$ donc $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$. On a décomposé tout vecteur de E en somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$, ce qui signifie que ces sous-espaces sont finalement supplémentaires.
Remarquons qu'on a montré en même temps que $\operatorname{Im} p$ est le sous-espace propre de p pour la valeur propre 1. Comme toujours, $\operatorname{Ker} p$ est le sous-espace propre de p pour la valeur propre 0.

Question I.4

On évalue $(e - p) \circ (e - p) = e - 2p + p \circ p = e - 2p + p = e - p = q$ donc q est aussi un projecteur.
$\operatorname{Ker}(e - p) = \{x \in E, p(x) = x\}$ est le sous-espace propre de p pour la valeur propre 1, donc $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$.
De même $\operatorname{Ker}(e - q)$ est le sous-espace propre de q pour la valeur propre 1, donc $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.
Enfin $p \circ q = p \circ (e - p) = p - p \circ p = 0$ et $q \circ p = (e - p) \circ p = p - p \circ p = 0$.

Question I.5

I.5.a Supposons $p_1 \circ p_2 = 0$. Alors dans le développement de $q \circ q$, il ne reste plus que $q \circ q = p_1 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 - p_2 \circ p_2 \circ p_1 - p_2 \circ p_1 \circ p_1$ car $p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0$ et $p_2 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_1 = 0$. Donc $q = p_1 + p_2 + p_2 \circ p_1 - 2p_2 \circ p_1 = q$ et q est bien un projecteur.

I.5.b Si $x \in \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$, alors $p_1(x) = p_2(x) = 0$ donc bien sûr $q(x) = 0$: on a montré $\operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2 \subset \operatorname{Ker} q$.

I.5.c Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} q$. Alors $q(x) = 0$ donc $p_1(x) = p_2(p_1(x)) - p_2(x) = p_2(p_1(x) - x) \in \operatorname{Im} p_2$. Mais les vecteurs de $\operatorname{Im} p_2$ sont invariants dans la projection p_2 et on en déduit que $p_2(p_1(x)) = p_1(x)$. Alors $q(x) = 0 = p_2(x)$ ce qui prouve que $x \in \operatorname{Ker} p_2$ et donc que $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p_2$.

En revanche, on ne peut pas prouver que $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p_1$: **l'énoncé est faux**.

En fait on va montrer qu'on a l'égalité dans le cas où on ajoute l'hypothèse $p_1 \circ p_2 = 0$, ce qu'on suppose donc maintenant.
Il ne reste plus qu'à établir la relation $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p_1$. On a vu plus haut que si $x \in \operatorname{Ker} q$, $p_2(p_1(x)) = p_1(x)$ ce qui prouve que $p_1(x) \in \operatorname{Im} p_2$. Il existe donc un vecteur y tel que $p_1(x) = p_2(y)$. Mais alors $p_1(x) = p_1(p_1(x)) = p_1 \circ p_2(x) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} p_1$.

Bref, **si on suppose** $p_1 \circ p_2 = 0$, alors $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$.

> Voici une démonstration, due à Jean-Marc Simon, que sans l'hypothèse $p_1 \circ p_2 = 0$, l'égalité $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$ est fausse.
>
> On se place dans l'ensemble $E = \mathbb{R}_2[X]$.
> On pose $p_1 : P \mapsto P(0)$ et $p_2 : P \mapsto P(1)$.
>
> On a bien $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $p_2 \circ p_2 = p_2$: ce sont deux projecteurs.
> En outre $p_2 \circ p_1 = p_1$ donc $q = p_2$.
>
> Ainsi $\operatorname{Ker} p_1 = \{P, P(0) = 0\} = \{XQ(X), Q \in \mathbb{R}_1[X]\}$ et
>
> $$\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_2 = \{P, P(1) = 0\} = \{(X-1)Q(X), Q \in \mathbb{R}_1[X]\}.$$
>
> Mais $\operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2 = \{P, P(0) = P(1) = 0\} = \{kX(X-1), k \in \mathbb{R}\}$.
>
> On a par exemple $X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \in \operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_2$ mais $X^2 - 1 \notin \operatorname{Ker} p_1$ et donc $\operatorname{Ker} q \not\subset \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$.

Question I.6

I.6.a Soit p un projecteur orthogonal : on décompose un vecteur u quelconque sous la forme $u = p(u) + (u - p(u))$ où $u - p(u) \in \operatorname{Ker} p$ et $u \perp u - p(u)$. Alors le théorème de Pythagore fournit $\|u\|^2 = \|p(u)\|^2 + \|u - p(u)\|^2 \geqslant \|p(u)\|^2$ donc $\|u\| \geqslant \|p(u)\|$.

I.6.b Réciproquement soit p un projecteur et supposons que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ ne soient pas orthogonaux. Alors il existe $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$ tels que $\langle x, y\rangle \neq 0$. En particulier x et y sont non nuls.
Notons alors $u = tx + y$, pour $t \in \mathbb{R}$. On a : $\|u\|^2 - \|p(u)\|^2 = \|x + ty\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2t\langle x, y\rangle$ et cette fonction de t change de signe, donc ne reste pas toujours positive, ce qui contredit l'hypothèse $(*)$.
On a bien montré que la condition $(*)$ entraîne que le projecteur p est orthogonal.

Partie II

Question II.1
L'existence d'un supplémentaire est un résultat de cours. Bien sûr $\dim H_u = n - 1$.

Question II.2
Soit p_u le projecteur sur $\operatorname{Vect} u$ parallèlement à H_u. On a $f(p_u(u)) = p_u(f(u))$ ou encore $f(u) = p_u(f(u))$ ce qui prouve que $f(u)$ est invariant par p_u, et donc que $f(u) \in \operatorname{Vect} u$.
On a bien montré : $\exists \lambda_u \in \mathbb{R}, f(u) = \lambda_u\, u$.

Question II.3
(u, v) est un système libre. Or $f(u + v) = f(u) + f(v)$ donc $\lambda_{u+v}(u + v) = \lambda_u u + \lambda_v v$ et $(\lambda_{u+v} - \lambda_u)u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v)v = 0$: comme (u, v) est libre, cela entraîne $\lambda_{u+v} - \lambda_u = \lambda_{u+v} - \lambda_v = 0$ donc $\lambda_u = \lambda_v$.

Question II.4
Si $v \neq 0$ s'écrit $v = ku$, on dispose de $f(v) = kf(u)$ donc $\lambda_v v = k\lambda_u u$ ou encore $k(\lambda_v - \lambda_u)u = 0$. Comme $k \neq 0$ et $u \neq 0$, on en déduit que $\lambda_u = \lambda_v$.

Question II.5
Finalement, si f commute avec tous les endomorphismes, il existe une constante λ **indépendante** de u telle que $f(u) = \lambda u$ pour tout vecteur u, c'est-à-dire : $f = \lambda e$. On a reconnu une homothétie de rapport λ.
Inversement, les homothéties répondent bien à la question : $\lambda e \circ g = g \circ \lambda e = \lambda g$ pour tout endomorphisme g de E.

Partie III

Question III.1
La bilinéarité de φ est évidente. La trace de la transposée d'une matrice M est égale à la trace de M donc $\varphi(B, A) = \operatorname{tr}(B \times {}^tA) = \operatorname{tr}({}^t(A \times {}^tB)) = \operatorname{tr}(A \times {}^tB) = \varphi(A, B)$ et φ est symétrique.
Notons $A = (a_{ij})$, alors $\varphi(A, A) = \operatorname{tr}(A \times {}^tA) = \operatorname{tr} C = \sum_{i=1}^{n} c_i i$ où $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ donc $\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$ est la somme des carrés de tous les coefficients de A. Il est alors clair que φ est positive et que $\varphi(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0$.
φ est donc bien un produit scalaire.

Question III.2
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$, p nombres réels quelconques et munissons l'espace $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique. Soit X le vecteur $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ et $U = (1, 1, \cdots, 1)$.

On a $\langle X, U\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k$, $\|X\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2}$ et $\|U\| = \sqrt{p}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz énonce alors : $\left|\sum_{k=1}^{p} x_k\right| \leqslant \sqrt{p}\sqrt{\sum_{k=1}^{p} x_k^2}$.

On applique cette formule aux $p = n^2$ coefficients de la matrice A et on obtient l'inégalité demandée par l'énoncé.

Question III.3
III.3.a Une matrice A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.
Autrement dit, en posant $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (I, L) est une base de $F^\perp$.

III.3.b On écrit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A' + B'$ où $A' \in F$ et $B' \in F^\perp$, donc A' est bien l'image de A dans la projection orthogonale sur F.

Partie IV

Question IV.1

ψ est clairement bilinéaire et symétrique.

$\psi(P,P) = \sum_{i=0}^{3} P(i)^2 \geqslant 0$ donc ψ est positive et si $\psi(P,P) = 0$, c'est que P admet au moins les 4 racines 0, 1, 2 et 3, ce qui prouve, puisque $\deg P \leqslant 3$, que $P = 0$. Ainsi ψ est bien définie positive, et donc un produit scalaire.

Question IV.2

IV.2.a On trouve $\psi(1,1) = 4$, $\psi(1,X) = 6$, $\psi(1,X^2) = 14$, $\psi(X,X) = 14$, $\psi(X,X^2) = 36$ et $\psi(X^2,X^2) = 98$.

IV.2.b (Orthonormalisation de Schmidt) On trouve successivement $P_0 = \frac{1}{2}$, puis $P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - \frac{3}{2})$ et enfin $P_2 = \dfrac{X^2 - 3x + 1}{2}$.

Question IV.3

IV.3.a La méthode naïve consiste à poser $R(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} 1 = d \\ 3 = a + b + c + d \\ 2 = 8a + 4b + 2c + d \\ 3 = 27a + 9b + 3c + d \end{cases} \iff (a,b,c,d) = (\frac{5}{6}, -4, \frac{31}{6}, 1) \iff R(X) = \frac{5X^3 - 24X^2 + 31X + 6}{6}.$$

IV.3.b Le projeté orthogonal de R sur F est alors $T(X) = \psi(R,P_0)P_0 + \psi(R,P_1)P_1 + \psi(R,P_2)P_2$. Le calcul, fastidieux, fournit : $T(X) = \dfrac{5 + 5X - X^2}{4}$.

IV.3.c On observe que $\sum_{i=0}^{3} |x_i - P(i)|^2 = \sum_{i=0}^{3} |R(i) - P(i)|^2 = \psi(R-P, R-P)$ donc minimiser Σ, c'est chercher la distance minimale de R à F, qui est atteinte justement quand $P = T$.

On trouve que ce minimum vaut $\min_{P \in F} \Sigma = \psi(R-T, R-T) = \frac{5}{4}$.