CORRIGÉ : MATH 1 ; MP ; Centrale_2011

Dans tout ce corrigé on notera $D(0,1)$ le disque unité de $\mathbb{C}$, c'est à dire :
$D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \quad \text{tq} \quad |z| < 1\}$. Rappelons en outre que : $\forall z \in D(0,1)$, la série $(\sum z^n)$ converge absolument de somme : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) $\forall x \in [k, k+1]$; $\forall y \in [k-1, k]$; $f(x) \leq f(k) \leq f(y)$
Alors : $\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(y)dy$

I.A.2) Pour $\alpha \leq 0$, la série $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ diverge grossièrement.
Pour $\alpha > 1$, on applique la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.
$\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\forall n \geq 2$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$
La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ est croissante majorée, alors elle converge.
Pour $0 < \alpha \leq 1$, on applique aussi la question précédente pour $a = 1$, et $f(t) = \frac{1}{t}$.
$\forall k \geq 1$; $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\forall n \geq 2$; $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$.

Conclusion :
La série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.A.3) D'aprés la question précèdente, pour tout $\alpha > 1$, et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

On fait tendre n vers l'infini, on obtient alors : $1 \leq S(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite on pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall \alpha > 1$; $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) $\forall k \geq n \geq 2$; $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}$

Pour tout entier $N \geq n$; $\int_n^{N+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{dx}{x^\alpha}$

$\forall N \geq n \geq 2$; $\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n-1}^{N}$.
On fait encore tendre N vers l'infini, on obtient : $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$.
D'où $\left|R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$
$\left|R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(-(1-\frac{1}{n})^{1-\alpha} + 1\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}(\alpha - 1 + o(1)) = O(\frac{1}{n^\alpha})$
Finalement : $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O(\frac{1}{n^\alpha})$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.
f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors d'aprés la formule de Taylor avec reste intégral appliqué à f entre k et $(k+1)$ on a :

$\forall k \in \mathbb{N}^*$; $f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{f''(k)}{2} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{2} f'''(t)dt.$
$\forall k \in \mathbb{N}^*$; $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$
$A_k = \int_k^{k+1}(k+1-t)^2 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2t^{\alpha+2}}dt$; on a : $0 \le A_k \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1}(k+1-t)^2 dt \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}} \int_k^{k+1} dt$
$0 \le A_k \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

$\mathbf{I.B.3}$) D'aprés $\mathbf{I.B.2}$) $\forall k \ge n \ge 1$; $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ avec $0 \le A_k \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.
$f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} = A_k$. D'où $\forall N \ge n \ge 1$;
$0 \le f(N+1) - f(n) - \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2}\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \sum_{k=n}^{N} A_k \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$
On fait tendre N vers l'infini, on obtient alors :
$0 \le -f(n) - R_n(\alpha) + \frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}R_n(\alpha+2)$. D'aprés $\mathbf{I.B.1}$) on a :
$R_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ et $R_n(\alpha+2) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$
D'où $-f(n) - R_n(\alpha) + \frac{1}{2n^\alpha} = O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ c'est à dire : $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

$\mathbf{II.A}$ – Nombres de Bernoulli

$\mathbf{II.A.1}$) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle infini de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞sur I.
Posons : $g = \sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i)}$.

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{p-1} a_i f^{(i+j)} = \sum_{k=1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)}$$

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} + \sum_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)}.$$

Soit alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall k \ge 2 \; ; \; a_{k-1} = -\sum_{i=0}^{k-2} \frac{a_i}{(k-i)!} \end{cases}$

L'égalité précèdente devient alors : $\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)}$.

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = f' + \sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!}\right) f^{(p+l)}$$

On pose alors : $\forall l \in [[1, p-1]]$; $b_{l,p} = \sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!}$.
Ainsi l'existence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est démontrée.

$\mathbf{II.A.2}$) Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite répondant aux conditions de la question précèdente.
D'aprés la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\forall f \in C^\infty(I, \mathbb{C})$

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{g^{(j)}}{j!} = a_0 f' + \sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!}\right) f^{(p+l)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

$$(a_0 - 1)f' + \sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{(k-i)!}\right) f^{(k)} + \sum_{l=1}^{p-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{l+p-1} \frac{a_i}{(l+p-i)!}\right) - b_{l,p}\right) f^{(p+l)} = 0$$

Pour $f(x) = x^p$, cet égalité s'écrit :

$$p(a_0-1)x^{p-1}\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)\frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k} = 0.$$

C'est un polynôme nul, alors ses coefficients sont nuls, et par suite :

$a_0 = 1$ et $\forall k \geq 2$; $a_{k-1} = -\sum_{j=0}^{k-2}\frac{a_j}{(k-j)!}$ ou encore : en posant : $p = k-1$ et $i = k-j = p+1-j$

$\boxed{a_0 = 1}$ et $\boxed{\forall p \geq 1\ ;\ a_p = -\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}}$; $\boxed{a_1 = \frac{-1}{2}}$; $\boxed{a_2 = \frac{1}{12}}$

Montrons par récurence sur p que : $\forall p \in \mathbb{N}\ ;\ |a_p| \leq 1$

ceci est évident pour $p = 0$, soit $p \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, p-1]]\ ;\ |a_k| \leq 1.$

alors : $\forall i \in [[2, p+1]]\ ;\ |a_{p+1-i}| \leq 1.$ D'où : $|a_p| = \left|\sum_{i=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-i}}{i!}\right| \leq \sum_{i=2}^{p+1}\frac{1}{i!} \leq e-2 \leq 1.$

II.A.3) a) $\forall p \in \mathbb{N}\ ;\ |a_p| \leq 1$, alors $\forall p \in \mathbb{N}\ ;\ \forall z \in \mathbb{C}\ ;\ |a_p z^p| \leq |z|^p$.

Si $|z| < 1$ alors la série $(\sum |z|^p)$ converge, et par suite la série $\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p\right)$ converge aussi absolument. On note alors : $\varphi(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$.

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, les deux séries : $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ et $\varphi(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$

sont absolument convergentes, alors $(e^z-1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$ qui est la série produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ d_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1}\frac{a_{n+1-p}}{p!} = a_n + \sum_{p=2}^{n+1}\frac{a_{n+1-p}}{p!} = 0 \quad et \quad d_1 = a_0 = 1.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, $(e^z-1)\varphi(z) = z$ et $\varphi(z) = \frac{z}{e^z-1}$ si $z \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, on pose : $\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{2z+z(e^z-1)}{2(e^z-1)} = \frac{z+ze^z}{2(e^z-1)}$

$$\psi(-z) = \frac{z+ze^{-z}}{2(1-e^{-z})} = \frac{(z+ze^{-z})e^z}{2(1-e^{-z})e^z} = \psi(z).$$

$\psi(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ est la somme d'une série entière paire sur $D(0,1)$.

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^*\ ;\ a_{2k+1} = 0.$

$$a_4 = -\sum_{i=2}^{5}\frac{a_{5-i}}{i!} = -\left(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!}\right) = -\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72}\right) = -\frac{6-15+10}{720} = -\frac{1}{720}.$$

Définition :

Les nombres $b_n = n!a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B – Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où $\alpha > 1$.

On fixe un entier naturel non nul p, et on note : $g = \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$.

II.B.1) Remarquons d'abord que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g l'est aussi.

Appliquons à g la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $(k+1)$à l'ordre $2p$

$$g(k+1)-g(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$g(k+1)-g(k) = f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p}\left[\frac{-\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-2p-l+1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \frac{-\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-2p)}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p)}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p)}{(2p)!} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p)}{(2p)!} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^{\alpha+2p+1}} dt$$

$$|R(k)| \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+l-1)}{k^{l}} \right] + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p)}{(2p)!} \frac{1}{k} \right)$$

$$|R(k)| \leq \frac{1}{k^{\alpha+2p}} \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|[\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+l-1)] + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p)}{(2p)!} \right)$$

D'où pour $A = \left(\sum_{l=1}^{2p-1} |b_{l,2p}|[\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p+l-1)] + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2p)}{(2p)!} \right)$;

$\forall k \in \mathbb{N}^*$; $|R(k)| \leq \frac{A}{k^{\alpha+2p}}$.

II.B.2) D'aprés la question précèdente : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.
$\forall N \geq n \geq 1$; $\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^{\alpha}} + \sum_{k=n}^{N} R(k) = g(N+1) - g(n)$.
On fait tendre N vers l'infini, on obtient : $|R_n(\alpha) + g(n)| \leq AR_n(\alpha+2p) = O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$
D'où : $R_n(\alpha) = -g(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. autrement dit :
$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. or pour $p \geq 2$; $a_{2p-1} = 0$, alors pour $p \geq 2$, on a :
$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. or on a déjà établit cet égalité dans la première partie pour $p = 1$, d'où pour tout entier non nul p on a :

$$R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$$

II.B.3) $R_n(3) = -a_0 f(n) - a_1 f'(n) - a_2 f''(n) - a_3 f'''(n) - a_4 f^{(4)}(n) + O(\frac{1}{n^8})$.
$f(n) = \frac{-1}{2n^2}$; $f'(n) = \frac{1}{n^3}$; $f''(n) = \frac{-3}{n^4}$; $f'''(n) = \frac{12}{n^5}$; $f^{(4)}(n) = \frac{-60}{n^6}$

$a_0 = 1$; $a_1 = \frac{-1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{12}$; $a_3 = 0$; $a_4 = \frac{-1}{720}$.

$\boxed{R_n(3) = \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{12n^4} - \frac{1}{12n^6} + O(\frac{1}{n^8})}$

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A – Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$A_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $A'_{n+1} = A_n$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0$.

Les polynômes $B_n = n!A_n$ s'appellent les polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) A_0 est uniquement déterminé et $\deg(A_0) = 0$, $A_1 = X + \lambda$ et $\int_0^1 (t+\lambda)dt = 0 = \frac{1}{2} + \lambda$

Alors $A_1 = X - \frac{1}{2}$ est bien déterminé et $\deg(A_1) = 1$.

Soit $n \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0,n]]$; A_k existe et unique et $\deg(A_k) = k$.

Alors A_{n+1} est un polynôme de degré $(n+1)$.

$A_{n+1}(X) = A_{n+1}(0) + \int_0^X A_n(t)dt$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0 = A_{n+1}(0) + \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)dt\right)dx$

$A_{n+1}(X) = \int_0^X A_n(t)dt - \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)dt\right)dx$ est donc un polynôme uniquement déterminé.

$A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \mu$ et $\int_0^1 (\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \mu)dt = 0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \mu$, alors $\mu = \frac{1}{12}$.

$A_2 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X + \nu$ et $\int_0^1 (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t + \nu)dt = 0 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \nu$, alors $\nu = 0$.

$\boxed{A_0 = 1}$; $\boxed{A_1 = X - \frac{1}{2}}$; $\boxed{A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}}$; $\boxed{A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{12}X}$

b) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.

$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que :

$\alpha_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha'_{n+1} = \alpha_n$ et $\int_0^1 \alpha_{n+1}(t)dt = \int_0^1 A_{n+1}(u)du = 0$. (poser : $u = 1-t$)

Alors par unicité de l'existence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établit à la question précèdente, on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n = \alpha_n$ c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.

c) $\forall n \geq 2$; $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_{n-1}(t)dt = 0$.

D'aprés la question précèdente on a : $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1}A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$. ($2n-1 \geq 2$)

D'où : $\forall n \geq 2$; $A_n(1) = A_n(0)$ et $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $c_n = A_n(0)$. $c_0 = 1 = A_0(0) = A_0(X)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $A_n(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{X^{n-i}}{(n-i)!}$, alors : $A_{n+1}(X) = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!} + A_{n+1}(0) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$

D'aprés la question précèdente : $\forall n \geq 1$; $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{(n+1-i)!}$.

e) D'aprés la formule ci dessus : $c_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$; $c_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{(n+1-i)!} = -\sum_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}$.

Alors d'aprés la question **II.A.2**), $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n = c_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) $\forall t \in [-1,1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|A_n(t)| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\right| \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|a_i|}{(n-i)!} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}$ (selon **II.A.2**))

$\forall z \in D(0,1)$; $\forall t \in [-1,1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|A_n(t)||z|^n \leq e|z|^n$

D'où la série $(\sum A_n(t)z^n)$ converge absolument pour tout $t \in [-1,1]$ et tout $z \in D(0,1)$.

On posera alors : $f(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n$.

b) Fixons $z \in D(0,1)$ et posons : $\forall t \in [0,1]$; $f_z(t) = f(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n$.

D'aprés la question précèdente, cette série converge normalement sur $[0,1]$.
$\forall n \in \mathbb{N}$; posons : $g_n(t) = A_n(t)z^n$; g_n est une fonction polynôme donc de classe C^1 sur $[0,1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g_n'(t) = A_n'(t)z^n = zg_{n-1}(t)$, alors la série $(\sum g_n'(t))$ est aussi normalement convergente pour $t \in [0,1]$. D'où ; f_z définit une application de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$\forall t \in [0,1]$; $f_z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} zg_{n-1}(t) = zf_z(t)$.

Alors il existe une constante complexe δ_z telle que : $\forall t \in [0,1]$; $f_z(t) = \delta_z e^{tz}$

$\forall t \in [0,1]$; $f_z(0) = \delta_z = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{e^z-1}$ si $z \neq 0$ (d'aprés : $\mathbf{II.A.3)b}$)

Finalement : $\boxed{\forall t \in [0,1] \; ; \; \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\} \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z-1}}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que : $|z| < 2\pi$. $\frac{ze^{z/2}+z}{e^z-1} = \frac{z(e^{z/2}+1)}{(e^{z/2})^2-1} = \frac{z}{e^{z/2}-1} = 2\frac{z/2}{e^{z/2}-1}$.

Alors pour tout $z \in D(0,1)\backslash\{0\}$;

$f_z(\frac{1}{2}) + f_z(0) = 2f_{z/2}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n(\frac{1}{2}) + A_n(0))z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)(\frac{z}{2})^n$.

Alors par identification des deux séries entières qui sont de rayon de convergence non nul, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n(\frac{1}{2}) + a_n = 2\frac{a_n}{2^n}$. D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; A_n(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n}$.

<u>$\mathbf{III.A.3}$) Variations des polynômes de Bernoulli</u>

a) (i) $A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$; $A_2'(x) = x - \frac{1}{2}$; A_2 est strictement décroissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2},1]$. $A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0 > A_2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{-1}{24}$.
(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k \in [[2,4n+2]]$; A_k satisfait les conditions données à l'énoncé.
A_{4n+2} est strictement décroissante sur $[0,\frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2},1]$.
$A_{4n+2}(0) = A_{4n+2}(1) > 0 > A_{4n+2}(\frac{1}{2})$.
Il existe un unique couple de réels (u,v) tel que : $0 < u < \frac{1}{2} < v < 1$ et $A_{4n+2}(u) = A_{4n+2}(v) = 0$.
et donc $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]0,u[$; $A_{4n+2}(t) < 0$ sur $]u,v[$; $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]v,1[$
$\forall t \in [0,1]$; $A_{4n+3}'(t) = A_{4n+2}(t)$
A_{4n+3} est strictement croissante sur $[0,u]$ et sur $[v,1]$, et strictement décroissante sur $[u,v]$.
D'aprés : $\mathbf{III.A.1)c}$) $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = 0 = a_{4n+3}$ donc d'aprés la question précèdente :
On déduit : $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = A_{4n+3}(\frac{1}{2}) = 0$.
Les variations ci dessus de A_{4n+3} permettent alors de déduire que :
$A_{4n+3}(t) < 0$ si $t \in]\frac{1}{2},1[$ et $A_{4n+3}(t) > 0$ si $t \in]0,\frac{1}{2}[$.
(iii) On refait le même procédé en exploitant les variations de A_{4n+3} établits ci dessus et le faite que $A_{4n+3} = A_{4n+4}'$ pour établir les propriétés relatives à A_{4n+4}.
et ensuite celle de A_{4n+5} par le même procédé.
Par récurrence sur n, on obtient alors les propriétés énoncées dans le texte de ce problème.

b) D'aprés les propriétés de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0,1]$

(i) $|A_{2n}(x)| \leq \max(|A_{2n}(0)|, \left|A_{2n}(\frac{1}{2})\right|) = \max(|a_{2n}|, \left|\left(\frac{1}{2^{2n-1}} - 1\right)a_{2n}\right| = |a_{2n}|$.

(ii) $|A_{2n+1}(x)| = \left|A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}(\frac{1}{2})\right| \leq \sup_{y\in[0,1]} |A'_{2n+1}(y)|\left|x-\frac{1}{2}\right| = \sup_{y\in[0,1]} |A_{2n}(y)|\left|x-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.
où l'on a utilisé l'inégalité des accroissements finis et le (i) ci dessus.

$\mathbf{III.B}$ – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

$\mathbf{III.B.1}$) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$.

a) Par récurrence sur $q \geq 1$, montrons que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^* \;;\; f(1)-f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}[A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt.$$

Pour $q = 1$:

$$\int_0^1 A_1(t)f''(t)dt = \left[A_1(t)f'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 A_1'(t)f'(t)dt = \left[A_1(t)f'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)dt$$

$$\int_0^1 A_1(t)f''(t)dt = \left[A_1(t)f'(t)\right]_0^1 - (f(1)-f(0))$$

La propriété est établit pour $q = 1$.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que : $f(1)-f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}[A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt.$

Par intégration par parties on a :

$\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt = [A_{q+1}(t)f^{(q+1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)dt.$ remplaçons dans l'égalité ci dessus on obtient :

$$f(1)-f(0) = \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j+1}[A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 + (-1)^{q+1} \int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)dt.$$

b) On applique la question précèdente pour $q = 2p+1$.

$$f(1)-f(0) = \sum_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1}[A_j(t)f^{(j)}(t)]_0^1 - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

$$f(1)-f(0) = \sum_{j=1}^{2p+1} (-1)^{j+1}(A_j(1)f^{(j)}(1) - A_j(0)f^{(j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

$$f(1)-f(0) = \frac{1}{2}(f'(0)+f'(1)) + \sum_{j=2}^{2p+1} (-1)^{j+1}(A_j(1)f^{(j)}(1) - A_j(0)f^{(j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

Donc en utilisant $\mathbf{III.A.1)c)}$

$$f(1)-f(0) = \frac{1}{2}(f'(0)+f'(1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

$\mathbf{III.B.2}$) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $[n,+\infty[$.

On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n,+\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

Pour tout $k \geq n$, on pose : $f_k(t) = f(k+t)$.

f_k est C^∞ sur $[0,1]$, alors d'aprés la question précèdente : $\forall p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f_k(1)-f_k(0) = \frac{1}{2}(f_k'(0)+f_k'(1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f_k^{(2j)}(1) - f_k^{(2j)}(0)\right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f_k^{(2p+2)}(t)dt.$$

$$f(k+1)-f(k) = \frac{1}{2}(f'(k)+f'(k+1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(k+t)dt.$$

Alors selon le changement de variable : $u = k+t$, on obtient :

$$f(k+1)-f(k) = \frac{1}{2}(f'(k)+f'(k+1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(k+1) - f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k)f^{(2p+2)}(u)du$$

$$f(k+1)-f(k) = \frac{1}{2}(f'(k)+f'(k+1)) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(k+1)-f^{(2j)}(k)) - \int_k^{k+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

Soit $N \geq n,$ et sommons l'expression précèdente entre n et $N.$

$$f(N+1)-f(n) = \sum_{k=n}^{N} f'(k) - \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}f'(N+1) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}(f^{(2j)}(N+1)-f^{(2j)}(n)) - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt$$

$\forall j \in \mathbb{N}$; $f^{(j)}$ garde un signe constant sur $[n,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$ $f^{(j)}$ est intégrable sur $[n,+\infty[,$ de plus, d'aprés $\mathbf{III.A.3)b}$) et $\mathbf{II.A.2}$) ; $\forall x \in [0,1]$; $|A_{2p+1}(x)| \leq 1$

Alors : $\forall t \in [n,+\infty[$; $\left|A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\right| \leq |f^{(2p+2)}(t)|.$

L'application $[t \mapsto A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)]$ est donc continue par morceaux intégrable sur $[n,+\infty[.$

D'où $\lim\limits_{N\to\infty} \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt$ existe bien et par conséquent $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{N} f'(k)\right)$ existe aussi.

On fait alors tendre N vers l'infini dans l'égalité ci dessus on obtient :

$$\sum_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$$

En utilisant $\mathbf{III.A.3)b}$) On a : $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt\right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{|a_{2p}|}{2}|f^{(2p+2)}(t)|dt$

Puisque $f^{(2p+2)}$ garde un signe constant sur $[n,+\infty[$, alors :

$\int_n^{+\infty}|f^{(2p+2)}(t)|dt = \left|\int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)dt\right| = |f^{(2p+1)}(n)|.$ D'où $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt\right| \leq \frac{|a_{2p}|}{2}|f^{(2p+1)}(n)|.$

$\mathbf{III.B.2}$) On a vu dans $\mathbf{II.B.2}$) que : $R_n(\alpha) = -\sum_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{i=2}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}).$$

Alors selon la question : $\mathbf{II.A.3)c}$) et pour $f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ qui définit bien une application de classe C^∞ sur $[n,+\infty[$ qui satisfait bien les conditions de $\mathbf{II.A.2}$), l'égalité précèdente s'écrit :

$$\sum_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}).$$

Identifions avec l'égalité de la question précèdente, le terme $O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$ s'écrit sous forme : d'une intégrale, qui est : $\int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$ On écrit alors :

$$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$$

IV Compléments sur l'erreur

On fixe ici un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}.$

IV.A – Encadrement de l'erreur

$\mathbf{IV.A.1}$) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0,1]$.

$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)dt.$ On change la deuxième intégrale par le changement de variable : $u = 1-t$, on obtient :

$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_0^{1/2} A_n(1-t)g(1-t)dt.$ et d'aprés $\mathbf{III.A.1)b}$)

$$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t)+(-1)^n g(1-t))dt$$

Alors pour n impair, ceci s'écrit : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t)-g(1-t))dt.$

g est croissante, alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $(g(t) - g(1-t)) \leq 0$.
Si $n \equiv 1 \pmod 4$ alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $A_n(t) \leq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \geq 0$.
Si $n \equiv 3 \pmod 4$ alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $A_n(t) \geq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \leq 0$.

IV.A.2) On reprend les notations de **II.B.2**) et le résultat du **III.B.2**)

$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt$.

$R_n(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt$.

$S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t)f^{(2p)}(t)dt$.

Remlaçons successivement dans cet égalité p par $(2p+1)$, $(2p+2)$, et $2p$. On obtient :
(i) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt$.
(ii) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t)f^{(4p+4)}(t)dt$.
(iii) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p-1}^*(t)f^{(4p)}(t)dt$.

Examinons le cas (i). $\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt$

$\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}(t-k)f^{(4p+2)}(t)dt = \sum_{k=n}^{\infty} \int_0^1 A_{4p+1}(u)f^{(4p+2)}(u+k)dt$.

L'application : $[u \mapsto f^{(4p+2)}(u+k)]$ est continue croissante sur $[0,1]$, alors d'aprés la question précèdente : $\int_0^1 A_{4p+1}(u)f^{(4p+2)}(u+k)dt \geq 0$ et par conséquent : $\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t)f^{(4p+2)}(t)dt \geq 0$
D'où $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha)$.
De la même manière on a : $\int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t)f^{(4p+4)}(t)dt \leq 0$ et $\int_n^{+\infty} A_{4p-1}^*(t)f^{(4p)}(t)dt \leq 0$.
D'où les inégalités : $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$ et $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.
Soit maintenant $p \geq 1$. On va utiliser ces deux inégalités dans les deux cas suivants :

Premier cas : Si p est pair ; $p = 2q$
$0 \leq S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) = S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4q+2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) = -a_{4q+2}f^{(4q+2)}(n) = -a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)$.
D'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)|$.

Deuxième cas : Si p est impair ; $p = 2q-1$
$0 \leq \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) - S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) = a_{4q}f^{(4q)}(n) = a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)$.
D'où $\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)|$.

IV.A.3) Dans cette question on reprend le cas de **II.B.3**), on applique la question précèdente, on obtient : $\left|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)\right| \leq |a_6f^{(6)}(100)| = \frac{1}{720.42}|f^{(6)}(100)|$.
$f(x) = \frac{-1}{2x^2}$; $f'(x) = \frac{1}{x^3}$; $f''(x) = \frac{-3}{x^4}$; $f^{(3)}(x) = \frac{12}{x^5}$; $f^{(4)}(x) = \frac{-60}{x^6}$; $f^{(5)}(x) = \frac{360}{x^7}$; $f^{(6)}(x) = \frac{-360.7}{x^8}$.
$f^{(6)}(100) = -360.7.10^{-16}$, alors $\left|S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3)\right| \leq \frac{360.7.10^{-16}}{720.42} = \frac{1}{12}10^{-16} \leq 10^{-17}$.

IV.B – Séries de Fourier

Pour tout entier naturel $p \geq 1$ et tout réel x, on pose : $\widetilde{A}_p(x) = A_p(\frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right])$.
IV.B.1) A_p est continue sur $\mathbb{R}$ et l'application $[x \mapsto \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right]]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $\widetilde{A}_p$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\widetilde{A}_p(x+2\pi) = A_p(\frac{x+2\pi}{2\pi} - \left[\frac{x+2\pi}{2\pi}\right]) = A_p(\frac{x}{2\pi} + 1 - \left[\frac{x}{2\pi} + 1\right]) = \widetilde{A}_p(x)$.

IV.B.2) $\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(t)e^{-int}dt$.

$\forall t \in [0,2\pi[\ ;\ \left[\frac{t}{2\pi}\right] = 0$ et $\widetilde{A}_p(t) = A_p(\frac{t}{2\pi})$ et $\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_p(\frac{t}{2\pi})e^{-int}dt$. On pose : $x = \frac{t}{2\pi}$.
$\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x)e^{-2i\pi nx}dx$. Fixons $n \in \mathbb{Z}^*$et posons : $h(x) = \frac{e^{-2i\pi nx}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$. h est C^∞ sur $[0,1]$ et on a :
$\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x)h^{(p+1)}(x)dx$. Appliquons maintenant la question $\mathbf{III.B.1}$).

$$\widehat{A}_p(n) = (-1)^p(h(1)-h(0)) \ - (-1)^p \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}[A_j(t)h^{(j)}(t)]_0^1$$

Vu que h est ses dérivées successives sont 1-périodiques et que d'aprés $\mathbf{III.A.1)c}$)
pour tout $j \geq 2$, $A_j(1) = A_j(0)$.
$\widehat{A}_p(n) = (-1)^{p+1}(A_1(1)h'(1) - A_1(0)h'(0)) \ = (-1)^{p+1}h'(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{(-2i\pi n)^p} = \frac{-1}{(2i\pi n)^p}$.
$\widehat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(x)dx = 0$.

$\mathbf{IV.B.3}$) La série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ est donnée par : $\widetilde{S}_p(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{(2i\pi n)^{p+1}}$.

$p+1 > 1$, alors la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

$\mathbf{IV.B.4}$) $a_{2p} = A_{2p}(0)$, $\widetilde{A}_{2p}$ est 2π-périodique de classe C^1 par morceaux, alors d'aprés le théorème de Dirichlet : $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{-1}{(2i\pi n)^{2p}} = \frac{\widetilde{A}_{2p}(+0)+\widetilde{A}_{2p}(-0)}{2}$.
Pour $x > 0$, x proche de 0, $\widetilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(\frac{x}{2\pi})$.
Pour $x < 0$, x proche de 0, $\widetilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(\frac{x}{2\pi}+1)$.
Alors : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^p}{(2\pi n)^{2p}} = \frac{A_{2p}(0)+A_{2p}(1)}{2} = A_{2p}(0)$. (D'aprés la question $\mathbf{III.A.1)b}$))
Finalement : $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1}\frac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$.

$\mathbf{IV.C}$ – Comportement de l'erreur

$\mathbf{IV.C.1}$) Il suffit de dériver l'expression : $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ $2p$ fois et ensuite $(2p+2)$ fois et utiliser l'égalité de $\mathbf{IV.B.4}$) pour obtenir le résultat : $\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}$.

$\mathbf{IV.C.2}$) Ici on va examiner deux résultats, celui de $\mathbf{IV.A.2}$) et celui de $\mathbf{IV.C.1}$).
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)|$ et $\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}$.
$S(2p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$. La série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ converge normalement pour $p \in [1,+\infty[$, alors
$\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \sum_{n=2}^{\infty}\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{n^{2p}} = 0$ et $\lim_{p\to+\infty} S(2p) = 1$.
Alors à n fixé : $\lim_{p\to+\infty} \left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \lim_{p\to+\infty} \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} = +\infty$.
Pour n fixé, plus que p est grand, plus que l'approximation de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ est mauvaise.
Étant donné que $\frac{S(2p+2)}{S(2p)} < 1$, ne choisir que des couples d'entiers tels que :
$\varepsilon_n = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)}{4n^2\pi^2}|f^{(2p)}(n)|$ est suffisament petit, comme ça on aura :
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq |a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)| \leq |a_{2p}f^{(2p)}(n)|\frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} \leq \varepsilon_n$
ce qui permet d'avoir de bonnes approximations de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$.