Exercice I

1°) f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 12 & 3 & 8 \\ -12 & -4 & -9 \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique χ_f est défini par :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 2 & 4 \\ 12 & 3-X & 8 \\ -12 & -4 & -9-X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2}{=} \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 3+3X & 3-X & 8 \\ 0 & -4 & -9-X \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{=} (1+X) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 9-X & 20 \\ 0 & -4 & -9-X \end{vmatrix} = -(1+X)\left(X^2 - 81 + 80\right) = (1+X)^2(1-X).$$

g est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On obtient, par développement selon la première colonne :

$$\chi_g(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -2 & -2 \\ 0 & -3-X & -2 \\ 0 & 4 & 3-X \end{vmatrix} = -(1+X)\left(X^2 - 9 + 8\right) = (1+X)^2(1-X).$$

$$\boxed{\chi_f(X) = \chi_g(X) = (1+X)^2(1-X).}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ et } g \text{ sont donc } -1 \text{ (double), et } 1.}$$

2°) Équations des sous-espaces propres de f :

$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ 12x + 2y + 8z = 0 \\ -12x - 4y - 10z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \text{ est la droite vectorielle d'équations } \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases}.}$$

$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} 6x + 2y + 4z = 0 \\ 12x + 4y + 8z = 0 \\ -12x - 4y - 8z = 0 \end{cases} \iff 3x + y + 2z = 0$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \text{ est le plan vectoriel d'équation } 3x + y + 2z = 0.}$$

Équations des sous-espaces propres de g :

$\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) \text{ est la droite vectorielle d'équations } \begin{cases} y = x \\ z = -2x \end{cases}.}$$

$\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})$ est caractérisé par :
$\begin{cases} -2y-2z=0 \\ -2y-2z=0 \iff y+z=0 \\ 4y+4z=0 \end{cases}$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id}) \text{ est le plan vectoriel d'équation } y+z=0.}$$

3°) Recherche d'une base $\mathcal{B}'=(V_1,V_2,V_3)$ de vecteurs propres communs à f et g :
on constate que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})\subset \mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})$, et $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})\subset \mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$.
On peut donc choisir par exemple V_1 dans $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id})$, V_2 dans $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{Id})$, et V_3 dans $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})\cap\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$.
Ce dernier sous-espace a pour équations $\begin{cases} 3x+y+2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3x \\ z=-3x \end{cases}$
Avec le choix d'une première composante égale à 1, cela donne :

$$\boxed{V_1=(1,2,-2);\quad V_2=(1,1,-2);\quad V_3=(1,3,-3).}$$

4°) La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est donc

$$\boxed{P=\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.}$$

On peut obtenir la matrice inverse par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donc

$$\boxed{P^{-1}=\mathrm{Pass}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$f(V_1)=V_1$, $f(V_2)=-V_2$, et $f(V_3)=-V_3$, donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$g(V_1)=-V_1$, $g(V_2)=V_2$, et $g(V_3)=-V_3$, donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$\boxed{B'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice II

1°) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}\, a_{n-1} \end{cases} \qquad (1)$$

Il est immédiat que tous ses termes sont positifs;
pour tout $n \geq 1$, $\quad a_{n+1} - a_n = \dfrac{2}{n+1}\, a_{n-1} \geq 0$, donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1, et en particulier,

$$\forall n \geq 1, \quad a_n \geq a_1 = 1.$$

Montrons la propriété $\forall n \geq 1, \quad a_n \leq n^2$ par récurrence.
L'inégalité $a_n \leq n^2$ est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ ($a_2 = 2 \leq 4$).
Soit $n \geq 2$ fixé, et supposons que pour tout $k \leq n$, l'inégalité $a_k \leq k^2$ soit vraie. Alors,

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}\, a_{n-1} &\leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 \\ &\leq n^2 + \frac{2}{n-1}(n-1)^2 \\ &\leq n^2 + 2\,(n-1) \\ &\leq n^2 + 2\,n - 2 \\ &\leq n^2 + 2\,n + 1 \\ &\leq (n+1)^2. \end{aligned}$$

L'inégalité $a_k \leq k^2$ est donc vraie pour $k = n+1$. En conclusion,

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 1, \text{ on a : } 1 \leq a_n \leq n^2.}$$

L'inégalité précédente montre que, si R_1 désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$, R_2 celui de $\sum n^2 x^n$, et R celui de $\sum a_n x^n$, on a :

$$R_2 \leq R \leq R_1.$$

Comme $R_1 = 1$ (série géométrique de raison x), et $R_2 = 1$ (appliquer la règle de d'Alembert), on en déduit :

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \textstyle\sum a_n x^n \text{ vaut 1.}}$$

2°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé. En multipliant les deux membres de (1) par $(n+1)\,x^n$, et en sommant pour n variant de 1 à N, on a, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{N}(n+1)a_n x^n + 2\sum_{n=1}^{N} a_{n-1}x^n$$

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)a_{n+1}x^n = x\sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{N} a_n x^n + 2x\sum_{n=1}^{N} a_{n-1}x^{n-1} \qquad (2)$$

La série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ s'obtient par dérivation terme à terme de $\sum a_n x^n$, donc a le même rayon de convergence, 1. La série entière $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ se déduit de $\sum n a_n x^{n-1}$ par réindexation, de même que $\sum a_{n-1}x^{n-1}$ vis-à-vis de $\sum a_n x^n$. Donc, toutes ces séries entières ont pour rayon de convergence 1.
Ainsi, lorsque x est dans $]-1,1[$, on peut passer à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans (2), et on a alors :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} \qquad (3).$$

Comme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + S(x)$.

La somme de la série dérivée terme à terme $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ est $S'(x)$, donc :

$\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = S'(x) - a_1.$

On obtient donc dans (3) :
$\forall x \in]-1,1[, \quad S'(x) - 1 = x\,S'(x) + S(x) + 2x\big(1 + S(x)\big).$
La fonction S est donc solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\boxed{(1-x)\,y' - (1+2x)\,y = 1 + 2x \qquad (E).}$$

3°) Résolvons (E) sur $]-1,1[$:
– le fonction constante -1 est une solution évidente;
– une primitive sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \dfrac{1+2x}{1-x} = -2 + \dfrac{3}{1-x}$ est $x \mapsto -2x - 3\ln(1-x)$, donc l'équation homogène associée a pour solutions sur $]-1,1[$ les fonctions $x \mapsto \lambda\, e^{-2x-3\ln(1-x)} = \lambda\, \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

Les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions de la forme : $x \mapsto -1 + \lambda\, \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

La fonction S vérifie la condition initiale $S(0) = 0$, donc est obtenue pour $\lambda = 1$. On a ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3} - 1.}$$

4°) La fonction constante -1 trouvée précédemment répond à la question.
Question subsidiaire : est-ce la seule solution de (E) sur $\mathbb{R}$?
La résolution du 3°) est en fait valable sur l'intervalle $]-\infty,1[$.
Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, les calculs sont analogues et on trouve des solutions de la forme
$x \mapsto -1 + \mu\, \dfrac{e^{-2x}}{(x-1)^3} \quad (\mu \in \mathbb{R})$.

Si f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x < 1, \quad f(x) = -1 + \lambda\, \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}; \\ \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall x > 1, \quad f(x) = -1 + \mu\, \dfrac{e^{-2x}}{(x-1)^3}. \end{cases}$

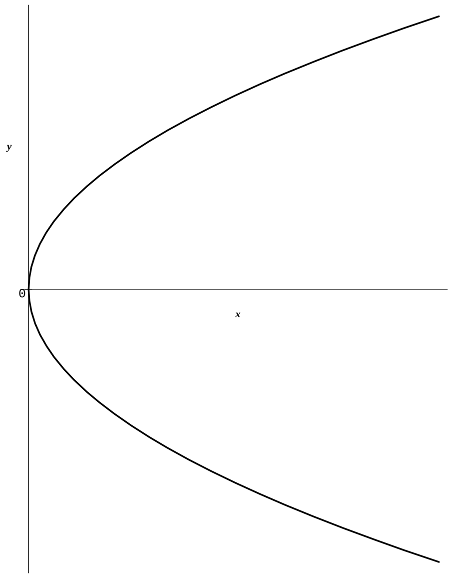
L'existence d'une limite finie en 1 impose $\lambda = \mu = 0$; donc

$$\boxed{(E) \text{ admet une seule solution sur } \mathbb{R}, \text{ la fonction constante } -1.}$$

Exercice III

1°) $\mathcal{P}$ est la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p}, \\ y = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, c'est donc la courbe d'équation cartésienne $y^2 = 2p\,x$, $y \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire la parabole de sommet O, d'axe Ox, de foyer $(\frac{p}{2}, 0)$, parcourue toute entière (y décrit $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est une parabole.}}$$



2°) Le vecteur dérivé est $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{t}{p} \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$, donc le paramétrage donné est régulier, et la normale en tout point est la droite passant par $M(t) = \frac{t^2}{2p}\overrightarrow{i} + t\,\overrightarrow{j}$, et orthogonale à $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$.

Un point $N(x, y)$ du plan est sur normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t)N} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt} = 0$, soit encore $\left(x - \dfrac{t^2}{2p}\right)\dfrac{t}{p} + (y - t) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{t}{p}\,x + y - t - \dfrac{t^3}{2p^2} = 0 \Leftrightarrow 2p\,t\,x + 2p^2\,y = t^3 + 2p^2\,t.$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de la normale en } M(t) \text{ à } \mathcal{P} \text{ est : } 2p\,t\,x + 2p^2\,y = t^3 + 2p^2\,t.}$$

3°) La normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par le point $M(\theta)$ de $\mathcal{P}$ si et seulement si les coordonnées $(\dfrac{\theta^2}{2p}, \theta)$ de ce point vérifient l'équation de cette normale :

$2p\,t\,\dfrac{\theta^2}{2p} + 2p^2\,\theta = t^3 + 2p^2\,t \Leftrightarrow t\,(\theta^2 - t^2) + 2p^2\,(\theta - t) = 0 \Leftrightarrow (\theta - t)\,\big(t(\theta + t) + 2p^2\big) = 0.$

Comme $M(\theta) \neq M(t)$, on a $\theta - t \neq 0$, et on peut conclure :

$\theta \in \mathbb{R}$ étant donné, la normale en $M(t) \neq M(\theta)$ passe par $M(\theta)$ si et seulement si t vérifie

$$t^2 + \theta\,t + 2p^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré en t est $\Delta = \theta^2 - 8p^2$, d'où la discussion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{– si } |\theta| > 2p\sqrt{2}, \text{ il existe deux tels points } M(t_1) \text{ et } M(t_2); \\ \text{– si } |\theta| = 2p\sqrt{2}, \text{ il existe un point } M(t)\ \left(t = -\dfrac{\theta}{2}\right); \\ \text{– si } |\theta| < 2p\sqrt{2}, \text{ il n'existe pas de point } M(t). \end{array}}$$

4°) Si une droite coupant $\mathcal{P}$ en deux points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$, alors, en notant θ le paramètre du point de $\mathcal{P}$ situé sur ces deux normales, par le point $M(\theta)$ passent deux normales distinctes, donc, d'après la discussion précédente, $|\theta| > 2p\sqrt{2}$, et les paramètres t_1 et t_2 des points distincts en question sont les solutions de l'équation $t^2 + \theta\, t + 2p^2 = 0$.
Ils vérifient donc : $\begin{cases} t_1 + t_2 = -\theta \\ t_1\, t_2 = 2p^2 \end{cases}$.

Une telle droite $\big(M(t_1)M(t_2)\big)$ est dirigée par $\overrightarrow{M(t_1)M(t_2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{t_2^2 - t_1^2}{2p} \\ t_2 - t_1 \end{pmatrix} = \dfrac{t_2 - t_1}{2p} \begin{pmatrix} t_2 + t_1 \\ 2p \end{pmatrix}$,

donc un vecteur directeur a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\theta \\ 2p \end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne de $\big(M(t_1)M(t_2)\big)$ est :

$$\begin{vmatrix} x - \frac{t_1^2}{2p} & -\theta \\ y - t_1 & 2p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2p\, x + \theta\, y - t_1\,(t_1 + \theta) = 0 \Leftrightarrow 2p\, x + \theta\, y + t_1\, t_2 = 0 \Leftrightarrow 2p\, x + \theta\, y + 2p^2 = 0.$$

L'ensemble des droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$ est l'ensemble des droites d'équations $2p\, x + \theta\, y + 2p^2 = 0$, où θ décrit $]-\infty, -2p\sqrt{2}[\cup]2p\sqrt{2}, +\infty[$.
Il s'agit donc d'une partie du faisceau linéaire de droites concourantes en le point de coordonnées $(-p, 0)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Les droites coupant } \mathcal{P} \text{ en deux points distincts tels que les normales à } \mathcal{P} \text{ en} \\ \text{ces points se coupent sur } \mathcal{P} \text{ passent par le point de coordonnées } (-p, 0). \end{array}}$$

Exercice IV

1°) Notons $\overrightarrow{p} = \cos t\,\overrightarrow{i} + \sin t\,\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{q} = -\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j}$.
Dans le repère (orthonormé) $(O, \overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}, \overrightarrow{k})$, la surface $\mathcal{S}$ a pour paramétrage :

$$(t,u) \mapsto M(t,u) = O + a\,\overrightarrow{p} + u\,\overrightarrow{q} + (a\,t+u)\,\overrightarrow{k}, \quad (t,u) \in \mathbb{R}^2.$$

Elle est de classe C^1, et pour tout (t,u) de $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t}(t,u) = a\,\overrightarrow{q} - u\,\overrightarrow{p} + a\,\overrightarrow{k}; \qquad \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}(t,u) = \overrightarrow{q} + \overrightarrow{k}.$$

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u}\right)(t,u) = u\,\overrightarrow{q} - u\,\overrightarrow{k}.$$

Le point $M(t,u)$ est donc stationnaire si et seulement si $u=0$.
L'ensemble des points stationnaires de $\mathcal{S}$ est donc la courbe de paramétrage

$$t \mapsto M(t,0) = O + a\,\overrightarrow{p} + a\,t\,\overrightarrow{k}, \quad t \in \mathbb{R};$$

on reconnaît la courbe $\mathcal{C}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des points réguliers de } \mathcal{S} \text{ est } \mathcal{S} \setminus \mathcal{C}.}$$

Les calculs qui précèdent montrent que la normale à $\mathcal{S}$ en tout point régulier est dirigée par $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{q} - \overrightarrow{k} = -\sin t\,\overrightarrow{i} + \cos t\,\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$;
un point $N = O + x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ de l'espace est dans le plan tangent en $M(t,u)$ à $\mathcal{S}$ si et seulement si $\overrightarrow{M(t,u)N} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff -\sin t\,(x - a\,\cos t + u\,\sin t) + \cos t\,(y - a\,\sin t - u\,\cos t) - (z - a\,t - u) = 0$
$\iff -x\,\sin t + y\,\cos t - z + a\,t = 0$.

$$\boxed{\text{Une équation du plan tangent en un point régulier de } \mathcal{S} \text{ est : } -x\,\sin t + y\,\cos t - z + a\,t = 0.}$$

2°) Le paramétrage de $\mathcal{S}$ peut se mettre sous la forme

$$(t,u) \mapsto M(t,u) = \left(O + a\,\overrightarrow{p} + a\,t\,\overrightarrow{k}\right) + u\,\left(\overrightarrow{q} + \overrightarrow{k}\right) = P(t) + u\,\overrightarrow{K}(t), \quad (t,u) \in \mathbb{R}^2,$$

où les fonctions $t \mapsto P(t)$ et $t \mapsto \overrightarrow{K}(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et la fonction $t \mapsto \overrightarrow{K}(t)$ ne s'annule pas.

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est une surface réglée, engendrée par les droites passant par } P(t) \text{ et dirigées par } \overrightarrow{K}(t) = \overrightarrow{q} + \overrightarrow{k}.}$$

Le paramètre u est le paramètre de parcours de chaque génératrice de $\mathcal{S}$, et la question 1°) montre que le plan tangent en un point régulier de S ne dépend pas de u; il en résulte que le plan tangent est le même en tout point régulier d'une génératrice :

$$\boxed{\text{la surface } \mathcal{S} \text{ est développable.}}$$

3°) $\mathcal{C}$ est la courbe de paramétrage $t \mapsto P(t) = O + a\,\overrightarrow{p} + a\,t\,\overrightarrow{k}, \quad t \in \mathbb{R}$; elle est de classe C^1, et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\dfrac{d\overrightarrow{P}}{dt} = a\,\overrightarrow{q} + a\overrightarrow{k} = a\,\overrightarrow{K}(t)$.
$\mathcal{C}$ est donc régulière, et la tangente à $\mathcal{C}$ au point $P(t)$ est dirigée par $\overrightarrow{K}(t)$; on reconnaît une génératrice de $\mathcal{S}$.

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ est engendrée par les tangentes à } \mathcal{C}.}$$

4°) $\mathcal{C}$ est de classe C^2, et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\dfrac{d^2\overrightarrow{P}}{dt^2} = -a\,\overrightarrow{p}$; $\dfrac{d\overrightarrow{P}}{dt} \wedge \dfrac{d^2\overrightarrow{P}}{dt^2} = -a^2\,\left(\overrightarrow{q} - \overrightarrow{k}\right) \neq \overrightarrow{0}$, donc $\mathcal{C}$ est birégulière, et le plan osculateur en tout point est le plan passant par $P(t)$ et normal à $\overrightarrow{q} - \overrightarrow{k} = \overrightarrow{n}$ (cf 1°)). Il s'agit donc du plan tangent à $\mathcal{S}$ le long de la génératrice de $P(t)$.

$$\boxed{\text{Le plan osculateur à } \mathcal{C} \text{ en } P(t) \text{ et le plan tangent à } \mathcal{S} \text{ en } M(t,u)\ (u \neq 0) \text{ coïncident.}}$$