Banque PT – Math I-B

Partie I

1) La série entière $\sum u_n x^n$ est géométrique de raison 1; son rayon de convergence vaut 1.
$w_n \sim v_n = \frac{1}{n}$ et par application immédiate de la règle de d'Alembert, (ou par intégration terme à terme de $\sum x^n$), le rayon de convergence des séries entières $\sum v_n x^n$ et $\sum w_n x^n$ est aussi égal à 1.

$$\boxed{\text{Les séries entières } \sum u_n x^n,\ \sum v_n x^n\ \sum w_n x^n \text{ ont pour rayon de convergence 1.}}$$

$\sum u_n$ diverge, car son terme général ne tend pas vers 0.
$\sum v_n$ est la série harmonique, divergente; compte-tenu de l'équivalence signalée plus haut et du fait qu'il s'agit de séries à termes positifs, $\sum w_n$ diverge également.

$$\boxed{\text{Les séries } \sum u_n,\ \sum v_n,\ \sum w_n \text{ sont divergentes.}}$$

2) On a directement :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x};\quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$$

$w_n = \frac{n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$ donc on peut écrire, pour $x \neq 0$:
$h(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -2\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x\right) = 1 - \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x).$

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} 1 - \left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3) Toujours directement,

$$\boxed{\lim_{1^-} f = +\infty; \text{ idem pour } g \text{ et } h.}$$

D'autre part,

$$\frac{g(x)}{f(x)} = -\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} \underset{\substack{x\to 1\\ <}}{\longrightarrow} 0^+ \quad \text{et} \quad \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+;$$

$$\frac{h(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x} + 2 - \frac{1}{\ln(1-x)} \underset{\substack{x\to 1\\ <}}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \frac{w_n}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$$\boxed{\text{On conjecture le résultat de la partie II.}}$$

Partie II

1) a) Puisque $\sum a_n$ est une série à termes positifs divergente, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ et en particulier,

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N_1} a_n \geq 2A.}$$

b) N_1 étant ainsi fixé, $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n$ est une fonction polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier, $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n$, ce qui implique : $\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1-\alpha \leq x \leq 1 \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n - \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n\right| \leq A$.
Grâce à la minoration du **a)**, on obtient dans ces conditions $\sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geq \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n - A \geq A$.

$$\boxed{\exists \alpha > 0,\ 0 \leq 1-x \leq \alpha \Rightarrow \sum_{n=1}^{N_1} a_n x^n \geq A.}$$

c) Pour tout x de $]0,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n + \sum\limits_{N_1+1}^{+\infty} a_n x^n \geq \sum\limits_{n=1}^{N_1} a_n x^n$ donc d'après ce qui précède, $\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 \leq 1-x \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A$.
Par définition,

$$\boxed{\lim_{1^-} f = +\infty.}$$

2) a) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n x^n$.
Cas $\lambda \neq 0$:
soit $x \in]-1,1[$. Alors la série à termes positifs $\sum a_n |x|^n$ est convergente; comme $b_n|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} |\lambda| a_n |x|^n$, la série entière $\sum b_n x^n$ est absolument convergente pour tout x de $]-1,1[$, donc $R \geq 1$;
soit $x > 1$. Alors la série $\sum a_n x^n$ diverge parce que son terme général ne tend pas vers 0; $b_n x^n$ ne tend pas vers 0 non plus, en vertu de l'équivalence précédente; donc la série $\sum b_n x^n$ diverge et, x étant aussi proche de 1 que l'on veut, $R \leq 1$. En conclusion,

$$\boxed{\text{si } \lambda \neq 0,\ \textstyle\sum b_n x^n \text{ a pour rayon de convergence } 1.}$$

Cas $\lambda = 0$:
La première conclusion du cas précédent subsiste (remplacer l'équivalence par une majoration à partir d'un certain rang); cependant l'inégalité peut être stricte, comme le montre l'exemple de $\sum x^n$ et de la série nulle.

$$\boxed{\text{si } \lambda = 0, \text{ le rayon de convergence de } \textstyle\sum b_n x^n \text{ est } \geq 1.}$$

b) Pour tout x de $]0,1[$, $f(x) > 0$ donc en particulier $f(x) \neq 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} - \lambda &= \frac{1}{f(x)}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n - \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{1}{f(x)}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n x^n - \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n\right)\\ &= \frac{1}{f(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda_n - \lambda) a_n x^n.\end{aligned}$$

La suite $(\lambda_n - \lambda)_n$ converge vers 0, donc est bornée :

$$\boxed{\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\lambda_n - \lambda| \leq M.}$$

c) Par définition de la convergence d'une suite,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq N_2 \Rightarrow |\lambda_n - \lambda| \leq \varepsilon.}$$

Pour tout x de $]0,1[$, $\sum\limits_{N_2+1}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leq \varepsilon \sum\limits_{N_2+1}^{+\infty} a_n x^n \leq \varepsilon \left(\sum\limits_{N_2+1}^{+\infty} a_n x^n + \sum\limits_{1}^{N_2} a_n x^n\right) = \varepsilon f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \sum_{N_2+1}^{+\infty} |\lambda_n - \lambda| a_n x^n \leq \varepsilon f(x).}$$

d) En exploitant les résultats précédents, on peut écrire : $\forall\varepsilon>0,\ \exists N_2\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]0,1[$,
$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-\lambda\right|=\frac{1}{f(x)}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda_n-\lambda)a_nx^n\right|\le\frac{1}{f(x)}\sum_{n=1}^{+\infty}|\lambda_n-\lambda|\,a_nx^n\le\varepsilon+\frac{M}{f(x)}\sum_{n=1}^{N_2}a_nx^n.$$
N_2 étant ainsi fixé (il ne dépend pas de x), comme $\lim\limits_{1^-}\sum\limits_{n=1}^{N_2}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{N_2}a_n$ et $\lim\limits_{1^-}f=+\infty$, on en déduit $\lim\limits_{1^-}\dfrac{M}{f(x)}\sum\limits_{n=1}^{N_2}a_nx^n=0$, ce qui peut se traduire par : $\exists\beta>0,\forall x\in]0,1[,\ 1-\beta\le x\Rightarrow\left|\dfrac{M}{f(x)}\sum\limits_{n=1}^{N_2}a_nx^n\right|\le\varepsilon$
et en résumé, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\beta>0,\ \forall x\in]0,1[,\ x\ge1-\beta\Rightarrow\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}-\lambda\right|\le2\varepsilon$, ce qui signifie $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lambda$.

$$\boxed{\text{Moyennant les hypothèses } (H),\text{ si } \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lambda,\text{ alors } \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{g(x)}{f(x)}=\lambda.}$$

Partie III

1) Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, la fonction $\theta\mapsto1-x\cos^2\theta$ est continue et monotone sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc l'ensemble de ses valeurs est le segment d'extrémités $1-x$ et 1. Il en résulte que si $x<1$ la fonction $\theta\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}}$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}}\text{ est définie pour } x<1.}$$

Pour $x=1$, on obtient l'intégrale $\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin\theta}$ qui est divergente en vertu de l'équivalence $\sin\theta\underset{0}{\sim}\theta$.

$$\boxed{F\text{ n'est pas définie pour } x=1.}$$

Pour θ de $[0,\frac{\pi}{2}]$ fixé, la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}}$ est une fonction croissante sur $]-\infty,1[$, donc
$\forall(x,y)\in]-\infty,1[^2,\ x\le y\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}}\le\frac{1}{\sqrt{1-y\cos^2\theta}}$ et en prenant les intégrales sur $[0,\pi/2]$, $F(x)\le F(y)$.

$$\boxed{F\text{ est croissante sur }]-\infty,1[.}$$

Il résulte des théorèmes relatifs aux opérations élémentaires sur les fonctions continues que la fonction $(x,\theta)\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}}$ est continue sur $]-\infty,1[\times[0,\frac{\pi}{2}]$. Le théorème relatif à la continuité des intégrales propres dépendant d'un paramètre permet alors de conclure que

$$\boxed{F\text{ est continue sur }]-\infty,1[.}$$

2) On utilise le développement en série entière de $t\mapsto(1+t)^\gamma$ de rayon de convergence 1 pour $\gamma=-1/2$ et on remplace t par $-t$:
$\forall t\in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\frac12t+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-\frac12)(-\frac32)\ldots(-\frac12-n+1)}{n!}(-t)^n=1+\frac12t+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^nn!}t^n$ soit encore

$$\boxed{\forall t\in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\frac12t+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}t^n\quad\text{et}\quad\alpha_n=\frac{2}{\pi}I_n.}$$

3) a) Pour $(x,\theta)\in]-1,1[\times[0,\frac{\pi}{2}]$, on peut utiliser le développement précédent avec $t = x\cos^2\theta$ et scinder en somme partielle de rang N et reste, ce qui donne : $\frac{1}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos^{2n}\theta\, x^n + \rho_N(\theta)$
où $|\rho_N(\theta)| = |\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n \cos^{2n}\theta\, x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.

$$\boxed{\forall (x,\theta)\in]-1,1[\times[0,\tfrac{\pi}{2}],\quad \frac{1}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \cos^{2n}\theta\, x^n + \rho_N(\theta) \quad \text{avec} \quad |\rho_N(\theta)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n.}$$

b) Grâce à la linéarité de l'intégrale, on en déduit :
$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-x\cos^2\theta}} = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n\, x^n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \rho_N(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, x^n I_n + R_N$
où $|R_N| = |\int_0^{\pi/2} \rho_N(\theta)\, d\theta| \leq \int_0^{\pi/2} |\rho_N(\theta)|\, d\theta \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$.

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, I_n\, x^n + R_N \quad \text{avec} \quad |R_N| \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n.}$$

Pour $x\in]-1,1[$ fixé, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \alpha_n |x|^n$ est le reste d'ordre N d'une série convergente, (de somme $\frac{1}{\sqrt{1-|x|}}$ si on indexe à partir de 0), donc cette expression tend vers 0 si N tend vers $+\infty$. A fortiori, $\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient le développement en série entière cherché :

$$\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad F(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n\, I_n\, x^n.}$$

4) En utilisant le résultat admis $I_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, on obtient $\alpha_n\, I_n = \frac{2}{\pi} I_n^2 \sim \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} u_n$ (notation de la partie I).
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions (H), on peut appliquer le II et conclure que

$$\boxed{F(x) \underset{1^-}{\sim} -\frac{1}{2}\ln(1-x).}$$

Partie IV

1) a) Pour tout $n\geq 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geq a_1 > 0$ donc la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie (H_1).
La minoration précédente montre que A_n ne tend pas vers 0, d'où la divergence de la série $\sum A_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie les conditions } (H_1) \text{ et } (H_3) \text{ de la partie II.}}$$

En faisant $x = 1$ dans la série entière $\sum A_n x^n$, on obtient la série divergente $\sum A_n$; donc :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \textstyle\sum A_n x^n \text{ est au plus égal à 1.}}$$

b) Pour $r\in]0,1[$, en remarquant qu'alors pour tout k compris entre 1 et n, on a $r^n \leq r^k$, on a :
$A_n r^n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) r^n \leq \sum_{k=1}^{n} a_k r^k$. Cette dernière expression est la somme partielle d'une série à termes positifs convergente; donc elle est majorée : $\exists M > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k r^k \leq M$ et a fortiori, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $A_n r^n \leq M$.

$$\boxed{\text{La suite } (A_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est majorée.}}$$

Soit x dans $]-1,1[$. Alors, en prenant r dans $]|x|,1[$, la suite $(A_n r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, et par le lemme d'Abel, la série $\sum A_n x^n$ est absolument convergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum A_n x^n$ est au moins égal à 1. Finalement (cf **a)**), ce rayon vaut 1.

$$\boxed{\text{La suite } (A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie aussi la condition } (H_2) \text{ de la partie II.}}$$

c) Pour tout x de $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=1}^{n} A_k x^k &= \sum_{k=1}^{n} A_k x^k - \sum_{k=1}^{n} A_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k x^k - \sum_{k=2}^{n+1} A_{k-1} x^k \\ &= A_1 x + \sum_{k=2}^{n}(A_k - A_{k-1})x^k - A_n x^{n+1} = A_1 x + \sum_{k=2}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - A_n x^{n+1} \qquad (A_1 = a_1)\end{aligned}$$

Pour x dans $]-1,1[$, la série $\sum A_n x^n$ converge, donc son terme général tend vers 0 et il en va de même de $A_n x^{n+1}$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.}$$

2) a) On a $C_n|x|^n \underset{n\to\infty}{\sim} \lambda A_n |x|^n$ si $\lambda \neq 0$, et $C_n|x|^n = \circ(A_n|x|^n)$ sinon. Dans les deux cas, on peut conclure à l'absolue convergence de $\sum C_n x^n$ pour tout x de $]-1,1[$. En particulier,

$$\boxed{\text{Pour } x \in]-1,1[, \text{ la série } \textstyle\sum C_n x^n \text{ est convergente.}}$$

b) En effectuant une transformation analogue à celle du **1)c)**, on peut écrire :
$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^k = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} C_k x^k + C_n x^{n+1}$. Si x est dans $]-1,1[$, la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} C_k x^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, et le terme $C_n x^{n+1}$ tend vers 0, donc la série $\sum c_n x^n$ est convergente.
On trouve la relation entre $\sum c_n x^n$ et $\sum C_n x^n$ par le même procédé qu'au **1)c)**.

$$\boxed{\text{Pour } x \in]-1,1[, \text{ la série } \textstyle\sum c_n x^n \text{ est convergente, et } (1-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n.}$$

c) On peut appliquer le résultat de la partie II aux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc :
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n}{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n x^n} = \lambda$, et compte-tenu des relations entre les sommes, on a aussi :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n} = \lambda.}$$

3) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par application de l'inégalité des accroissements finis à la fonction logarithme népérien sur $[k, k+1]$, on obtient :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

Par addition des inégalités de ce type pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $A_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq A_n$
d'où par une relecture, $\ln(n+1) \leq A_n \leq 1 + \ln n$.
Il en résulte

$$\boxed{A_n \sim \ln n.}$$

b) Encadrons $n \geq 1$ par deux puissances successives de 2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ n \in [2^p, 2^{p+1}[$. Si n est dans cet intervalle, alors $C_n = p + 1$; or $2^p \leq n < 2^{p+1} \Leftrightarrow p \ln 2 \leq \ln n < (p+1) \ln 2 \Leftrightarrow p \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < p + 1$ ce qui signifie que p est la partie entière de $\frac{\ln n}{\ln 2}$. On a donc :

$$\boxed{\frac{\ln n}{\ln 2} < C_n \leq \frac{\ln n}{\ln 2} + 1.}$$

c) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (H').
L'encadrement précédent permet de conclure que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{C_n}{A_n} = \frac{1}{\ln 2}$; on peut donc appliquer le résultat du **2) c)** qui donne : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n x^n}{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} = \dfrac{1}{\ln 2}$. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^k} \underset{1^-}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{\ln 2}.}$$