Banque PT
Maths I-B
Corrigé de DURIN J-P   PT Cluny.

Partie I.

1) Calcul de u_n

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t+n-n}{t+n}dt = \frac{1}{n}\int_0^1 \left(1-\frac{n}{t+n}\right)dt = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\ .$$

La série de terme général u_n est convergente car $u_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n))$ et

donc $u_n \approx \frac{1}{2n^2}$ qd $n \to +\infty$ et Riemann assure la convergence.

---

2) Calcul de S_n

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1) - \ln k\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\,.$$

Mais alors $S_n = \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n\right) - \ln\frac{n+1}{n}$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n\right) = S$$

---

3) 0n peut écrire: $\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{n+1}dt \le u_n \le \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t}{n}dt$ soit $\frac{1}{2n(n+1)} \le u_n \le \frac{1}{2n^2} \le \frac{1}{2n(n-1)}$ de sorte qu'en ne retenant que les termes extrêmes de ces inégalités on obtient:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \le u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$ inégalités valables pour $n \ge 2$.

$S - S_n = R_n$ reste d'indice n de la série de terme général u_n. On a $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ d'où

$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \le R_n \le \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2(n+1)} \le S - S_n \le \frac{1}{2n}$$

---

4) Pour garantir $\left|S - S_n\right| \le 10^{-2}$, la formule précédente suggère de prendre n ; $\frac{1}{2n} \le 10^{-2}$ soit $n \ge 50$

Pour garantir $\left|S - S_n\right| \le 10^{-6}$, il faut cette fois $n \ge 500000$ avec cette même formule.

On peut cependant améliorer nettement les choses en remarquant que:

$-\frac{1}{4n(n+1)} \le S - S_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n}\right) \le \frac{1}{4n(n+1)}$ d'où en prenant pour valeur approchée de S la valeur $S_n + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$ on obtient: S à 10^{-2} près pour $\frac{1}{4n(n+1)} \le 10^{-2}$ soit $n \ge 5$ et

S à 10^{-6} près pour $\frac{1}{4n(n+1)} \le 10^{-6}$ soit $n \ge 500$

Commentaire: La 1ère évaluation n'est pas performante, la 2ème est acceptable pour l'approximation à 10^{-2} près, elle l'est beaucoup moins pour l'approximation à 10^{-6} près.

Partie II.

Soit n fixé supérieur ou égal à 1. $A(x)=\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt$ et $B(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$

1) Domaine de définition de A et B.

- Pour A. La fonction $t\to\frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur **R** à condition de lui donner la valeur 1 en 0. Elle est donc intégrable sur tout segment de **R** , et $Def\,(A)=$ **R**.
- Pour B. La fonction $t\to\frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur **R***, et au $V(0)$, $\frac{e^{-t}}{t}\approx\frac{1}{t}$ de sorte que si 0 appartient à l'intervalle $[x,+\infty[$, l'intégrale est généralisée en 0, et est divergente. Il faut donc avoir $x>0$ et alors le seul problème d'intégrale généralisée est en $+\infty$. Or $\lim_{t\to+\infty} t^2\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)=0$ assure que $\frac{e^{-t}}{t}\leq\frac{1}{t^2}$ au $V(+\infty)$ et Riemann donne la convergence. $Def\,(B)=]0,+\infty[$.

A et B sont C^∞ sur leurs domaines de définition respectifs. En effet:

- $t\to\frac{1-e^{-t}}{t}$ étant continue sur **R** , A est dérivable sur **R** de dérivée $A'(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$. Cette fonction est C^∞ sur **R** car elle est la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n+1)!}$ de rayon de convergence infini.
- $B(x)=\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ soit encore $B(x)=-\int_1^x\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$. Or $t\to\frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc B est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $B'(x)=\frac{-e^{-x}}{x}$, fonction C^∞ sur $]0,+\infty[$ comme produit de 2 fonctions C^∞ sur $]0,+\infty[$.

---

2) Montrons pour $u\in[0,1]$ que $\int_0^1\frac{1-(1-u)^n}{u}du=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$

Notons tout de suite que $\frac{1-(1-u)^n}{u}\approx n$ au $V(0)$ et qu'il n'y a donc pas de problème d'intégrale généralisée en 0. On notera f la fonction précédente prolongée par n en 0. On peut alors écrire:

$$f(u)=\begin{cases} n \quad pour \quad u=0 \\ \frac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)}=1+(1-u)+\ldots+(1-u)^{n-1} \quad pour \quad u\neq0\end{cases}$$

de sorte que l'on peut même dire que: $\forall u\in[0,1]$, $f(u)=1+(1-u)+\ldots+(1-u)^{n-1}$ et donc

$$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}du = 1-\left[\frac{(1-u)^2}{2}\right]_0^1 - .... - \left[\frac{(1-u)^n}{n}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}du - \int_1^n \frac{dt}{t}$ Dès lors posons $u = \frac{t}{n}$ dans la 1ère intégrale.

$\int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}du = \int_0^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{\frac{t}{n}}\frac{1}{n}dt = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt + \int_1^n \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt$ et par suite:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt .$$

----

3)a) Montrons pour $u \in [0,1]$ que $(1-u^2)e^{-u} \le 1-u \le e^{-u}$

- La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 donne: $e^{-u} = 1-u+\frac{u^2}{2}e^{-\theta}$ avec $0<\theta<u$ ceci assure l'inégalité de droite demandée $1-u \le e^{-u}$.
- L'inégalité de gauche est bien vérifiée pour $u=1$, et après division des 2 membres par $1-u>0$ elle est équivalente à $(1+u)e^{-u} \le 1$ soit encore à $e^u \ge 1+u$ inégalité assurée par le théorème des accroissements finis: $\frac{e^u-1}{u} = e^{\theta} > 1$ avec $0<\theta<u$. On a donc bien

$$(1-u^2)e^{-u} \le 1-u \le e^{-u} \text{ pour } u \in [0,1].$$

b) Montrons pour $\alpha \in [0,1]$ que $(1-\alpha)^n \ge 1-n\alpha$.

- Pour $\alpha = 0$ l'inégalité est vraie.
- Pour $\alpha \ne 0$ l'inégalité est équivalente à $\frac{(1-\alpha)^n-1}{\alpha} \ge -n$. Or si on note $g(\alpha) = (1-\alpha)^n$, le théorème des accroissements finis donne $\frac{g(\alpha)-g(0)}{\alpha} = g'(\theta)$ avec $0<\theta<\alpha$ soit ici $\frac{(1-\alpha)^n-1}{\alpha} \ge -n(1-\theta)^{n-1}$ et comme $0 \le (1-\theta)^{n-1} \le 1$ on en déduit $-n(1-\alpha)^{n-1} \ge -n$ et donc

$$(1-\alpha)^n \ge 1-n\alpha \text{ pour } \alpha \in [0,1].$$

c) Montrons pour $t \in [0,n]$ que $0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2}{n}e^{-t}$

$t \in [0,n] \Rightarrow \frac{t}{n} \in [0,1]$ et par suite:

- a) assure que $1-\frac{t}{n} \le e^{-\frac{t}{n}}$ d'où, en élevant à la puissance n, (tout est ≥ 0) $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}$ c'est à dire

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$ ce qui est l'inégalité de gauche demandée.

- a) assure toujours que $\left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)e^{-\frac{t}{n}} \le 1-\dfrac{t}{n}$ d'où, en élevant à la puissance n,

$\left(1-\dfrac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \le \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ et d'après b) $(1-\dfrac{t^2}{n^2})^n \ge 1-n\dfrac{t^2}{n^2}$ permet d'assurer que

$\left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)e^{-t} \le \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ soit encore $e^{-t}-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \le \dfrac{t^2}{n}e^{-t}$ ce qui est l'inégalité de droite demandée.

$$\text{Pour } t \in [0,n] \;,\quad 0 \le e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2}{n}e^{-t}.$$

d) On a que $S = \lim\limits_{n\to\infty}[\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt]$ d'après **2)**

- D'après c), on peut écrire pour $t \in [0,1]$ $0 \le \dfrac{e^{-t}-1}{t} + \dfrac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \le \dfrac{t}{n}e^{-t}$ soit encore

$0 \le \dfrac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} - \dfrac{1-e^t}{t} \le \dfrac{t}{n}e^{-t}$ et en intégrant entre 0 et 1, on obtient:

$$0 \le \int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt - A(1) \le \frac{1}{n}\int_0^1 te^{-t}dt \quad \text{ce qui assure que} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt = A(1)$$

- Toujours d'après c), on a pour $t \ge 1$, $0 \le \dfrac{e^{-t}}{t} - \dfrac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t} \le \dfrac{t}{n}e^{-t}$ et en intégrant entre 1 et n, on obtient:

$$0 \le \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt \le \frac{1}{n}\int_1^n te^{-t}dt \quad \text{soit à fortiori} \quad 0 \le \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt \le \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} te^{-t}dt$$

$$\text{ce qui assure} \quad \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{t}dt = \lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt = B(1)$$

<u>Conclusion:</u> $S = A(1) - B(1)$

<u>Partie III.</u>

1) Soit $x > 0$. <u>Calcul de</u> $A(x) - B(x) - A(1) + B(1)$.

$$A(x)-B(x)-A(1)+B(1)=\int_1^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt-\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}dt=\int_1^x \frac{dt}{t}=\ln x \quad \text{d'où}$$

pour $x>0 \quad S=A(x)-B(x)-\ln x$

----

2)a) <u>Montrons que pour</u> $x>0 \qquad 0\le B(x)\le \frac{e^{-x}}{x}$.

- $B(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ donc $B(x)\ge 0$ car $\frac{e^{-t}}{t}\ge 0$ sur $[x,+\infty[$. L'inégalité de gauche est acquise.
- Par ailleurs on peut écrire $\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\le \frac{1}{x}\int_x^{+\infty}e^{-t}dt=\frac{e^{-x}}{x}$. L'inégalité de droite est acquise.

pour $x>0 \qquad 0\le B(x)\le \frac{e^{-x}}{x}$.

b) <u>Cherchons</u> x_0 tel que $x\ge x_0 \Rightarrow B(x)\le \frac{1}{3}10^{-2}$. La fonction $x\to \frac{e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ comme produit de 2 fonctions positives décroissantes sur cet intervalle. Cherchons x_0 tel que $\frac{e^{x_0}}{x_0}\le \frac{1}{3}10^{-2}$ alors pour $x\ge x_0$ on aura $\frac{e^{x}}{x}\le \frac{1}{3}10^{-2}$ et donc $B(x)$ aussi.

Par dichotomie appliquée à la quantité $\frac{300}{x}e^{-x}$ comparée à 1, on obtient que $x_0=4{,}26$ est une possibilité.

----

3)a) On a vu que $\frac{1-e^{-t}}{t}$ est développable en serie entière de rayon de convergence infini (cf II1). Son développement est $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{(n+1)!}$. Comme $A(0)=0$, en intégrant terme à terme on obtient:

$$A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n.n!} \qquad \text{on a donc } a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}$$

b) Soit $x>0$ fixé. $\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_nx^n\right|}=\frac{n}{n+1}\frac{x}{n+1}\le\frac{x}{n}\le 1$ dès que $n\ge x$.

Pour $n\ge x$, on peut appliquer le résultat concernant la majoration de la valeur absolue du reste d'une série vérifiant le critère des séries alternées et donc:

$$n\ge x\Rightarrow \left|R_n(x)\right|\le\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$$

----

4) D'apès III1, pour $x>0 \quad S=A(x)-B(x)-\ln x$ s'écrit avec des notations classiques

$S=A_n(x)+R_n(x)-B(x)-\ln x$ et donc $\left|S-(A_n(x)-\ln x)\right|\le\left|R_n(x)\right|+\left|B(x)\right|$

- Dès lors, choisissons par exemple $x=5$. $A_n(5)-\ln 5$ sera une valeur approchée de S à 10^{-2} près dès que $\left|R_n(5)\right|\le\frac{2}{3}10^{-2}$ ce qui est réalisé dès que $\begin{cases} n\ge 5 \\ \frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\le\frac{2}{3}10^{-2}\end{cases}$ $n=13$ convient.

$S=A_{13}(5)-\ln 5$ à 10^{-2} près. Avec cette formule, la machine donne $S\cong 0{,}58$.

• Rq: Si on avait choisi $x = 4{,}3$, la valeur de n qui convient est 12. On ne gagne donc pas grand chose sur le nombre de termes à prendre dans la série, et le calcul est sans doute préférable avec $x = 5$ entier.

Partie IV.

Soient les fonctions: $f:(x,t) \to e^{-t}t^x$ et $F: x \to \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$

1) $t \to e^{-t}t^x$ est continue sur $[0,+\infty[$ pour $x \geq 0$ et sur $]0,+\infty[$ pour $x < 0$, donc localement intégrable sur ces intervalles.

• au $V(+\infty)$ $t^2(e^{-t}t^x) \to 0$ qd $t \to +\infty$ et Riemann assure la convergence.

• au $V(0)$ $e^{-t}t^x \approx \dfrac{1}{t^{-x}}$ et donc il y a convergence pour $-x < 1$ soit $x > -1$.

$$Def(F) =]-1,+\infty[$$

----

2) Soit a et b tels que $-1 < a < b$. On définit, pour $t > 0$ $\varphi(t) = \begin{cases} t^a e^{-t} & si \quad t \in]0,1[\\ t^b e^{-t} & si \quad t \in [1,+\infty[\end{cases}$

φ est continue sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $[1,+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur ces intervalles. Il reste à vérifier la continuité en 1. Or on a: $\lim\limits_{t \to 1^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} \varphi(t) = \dfrac{1}{e}$.

φ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $(x,t) \in [a,b)] \times]0,+\infty[$ $t^x \leq t^a$ pour $t \in]0,1[$

$t^x \leq t^b$ pour $t \in [1,+\infty[$ et donc sur $[a,b)] \times]0,+\infty[$ on a

$t^x e^{-t} \leq \varphi(t)$ fonction indépendante de x , continue sur $]0,+\infty[$, et telle que $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge. Le théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique.

F est continue sur $[a,b]$ et ce pour tout a et b tels que $-1 < a < b$, donc F est continue sur $]-1,+\infty[$.

----

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}t^x \ln t$. Comme précédemment sur $[a,b)] \times]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq |\ln t|\varphi(t)$

fonction indépendante de x , continue sur $]0,+\infty[$, et telle que $\int_0^{+\infty} |\ln t|\varphi(t)dt$ converge.

Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ d'une fonction définie par une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique.

F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et ce pour tout a et b tels que $-1 < a < b$, donc F est C^1 sur $]-1,+\infty[$.

Note pour la convergence de $\int_0^{+\infty} |\ln t|\varphi(t)dt$.

• au $V(+\infty)$ $t^2(|\ln t|\varphi(t)) \to 0$ et Riemann assure la convergence.

- au $V(0)$ choisissons α tel que $-1 < -\alpha < a$, on a donc $\alpha < 1$ et $\lim_{t \to 0^+} t^{\alpha} (|\ln t| \varphi(t)) = 0$, donc Riemann assure la convergence.

----

4) On a $F^{'}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \int_0^1 e^{-t} \ln t dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$. On intègre alors par parties en posant:

- Dans la 1ère intégrale $\begin{cases} u = \ln t \quad u^{'} = \dfrac{1}{t} \\ v^{'} = e^{-t} \quad v = 1 - e^{-t} \end{cases}$ d'où

$$\int_0^1 e^{-t} \ln t dt = \left[(1 - e^{t}) \ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = -A(1)$$

- Dans la 2ème intégrale $\begin{cases} u = \ln t \quad u^{'} = \dfrac{1}{t} \\ v^{'} = e^{-t} \quad v = -e^{-t} \end{cases}$ d'où

$$\int_1^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \left[-e^{t} \ln t\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = B(1)$$

Donc $F^{'}(0) = -(A(1) - B(1)) = -S$

----

5) Soit $I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln t dt$.

$t \to e^{-xt} \ln t$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable sur cet intervalle.

- au $V(0)$ $e^{-xt} \ln t \approx \ln t$ et $\lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} \ln t = 0$ Riemann assure la convergence.
- au $V(+\infty)$ Il est nécessaire que $x > 0$, sinon $e^{-xt} \ln t \to +\infty$ et l'intégrale serait divergente. Mais alors pour $x > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^2 (e^{-xt} \ln t) = 0$ et Riemann assure la convergence.

$$Def\,(I) =]0,+\infty[$$

On a $F^{'}(0) = -S = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$. Dans I posons $u = xt$. On a $I(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln \dfrac{u}{x} du$ soit

$I(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du - \dfrac{\ln x}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} du$ c'est à dire:

$$I(x) = -\frac{S + \ln x}{x} \text{ pour } x > 0.$$