Banque PT 2007 — épreuve C

Partie I

Question I.1
Les deux fonctions sont paires.

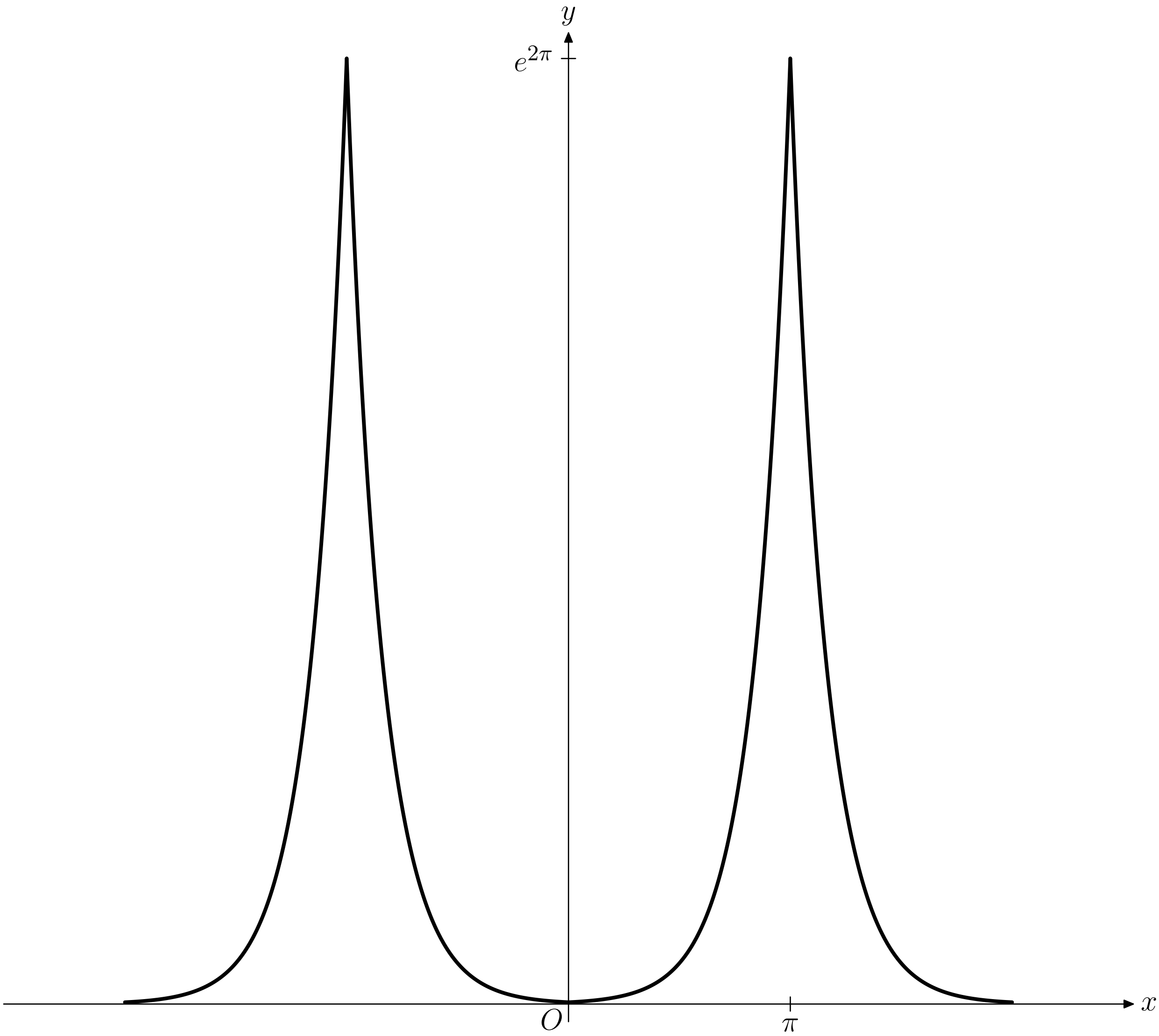

Figure 1 la fonction f_2

Remarque : $e^{2\pi} \approx 535$ et l'échelle en y est très petite : le point d'abscisse nulle est d'ordonnée 1, c'est un point anguleux, contrairement aux apparences. La courbe ne touche pas l'axe des x.

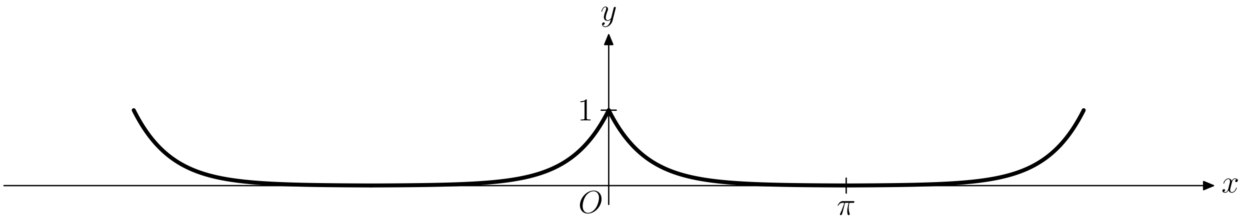

Figure 2 la fonction f_{-2}

Remarque : c'est ici le contraire, mais la courbe ne touche toujours pas l'axe des x. Le repère choisi est ici orthonormé. Les minimas, par exemple en l'abscisse π, sont des points anguleux, contrairement aux apparences.

Question I.2

C'est du cours : $a_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt$; et, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$, et enfin $b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$, où on a posé $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Question I.3

Remarquons qu'ici f_a et f_{-a} sont paires donc, pour $n \geqslant 1$, $b_n(f_a) = b_n(f_{-a}) = 0$.

I.3.a $\quad 2\pi a_0(f_a) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_a(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} e^{at}\,dt = 2\left[\frac{e^{at}}{a}\right]_0^{\pi} = 2\frac{e^{a\pi}-1}{a}$.

Le calcul est le même pour $2\pi a_0(f_{-a}) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_{-a}(t)\,dt = 2\frac{1-e^{-a\pi}}{a}$.

I.3.b $\quad$ Observons que $a_n(f_a) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{at}\cos nt\,dt$, grâce à la parité de f_a.

On nous demande donc d'évaluer $\dfrac{\pi}{2}a_n(f_a)$, et on procède par double intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{at}\cos nt\,dt &= \left[\frac{e^{at}}{a}\cos nt\right]_0^{\pi} + \frac{n}{a}\int_0^{\pi} e^{at}\sin nt\,dt\\ &= \frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a} + \frac{n}{a}\left[\frac{e^{at}}{a}\sin nt\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{a^2}\int_0^{\pi} e^{at}\cos nt\,dt\\ &= \frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a} - \frac{n^2}{a^2}\int_0^{\pi} e^{at}\cos nt\,dt.\end{aligned}$$

I.3.c $\quad$ On a déjà vu que $a_0(f_a) = \dfrac{e^{a\pi}-1}{a\pi}$ et que pour $n \geqslant 1$, $b_n(f_a) = 0$ puisque f_a est paire.

On déduit des questions précédentes que, pour $n \geqslant 1$, $a_n(f_a) = \dfrac{2}{a\pi}((-1)^n e^{a\pi}-1) - \dfrac{n^2}{a^2}a_n(f_a)$ et, finalement : $a_n(f_a) = \dfrac{2a}{(n^2+a^2)\pi}((-1)^n e^{a\pi}-1)$.

I.3.d $\quad$ Les calculs précédents n'ont fait aucune hypothèse sur le signe de a, et les formules précédentes restent valables.

On peut les réécrire : $a_0(f_{-a}) = \dfrac{1-e^{-a\pi}}{a\pi}$, et, pour $n \geqslant 1$, $b_n(f_{-a}) = 0$ et

$$a_n(f_{-a}) = \frac{2a}{(n^2+a^2)\pi}(1-(-1)^n e^{a\pi}).$$

Question I.4

Une fonction f périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si il existe une subdivision d'une période de f telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$ de la subdivision et admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle fermé $[x_k, x_{k+1}]$.

C'est le cas de f_a et de f_{-a}, qui sont à la fois continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Question I.5

On est dans les hypothèses où l'on peut appliquer la version "raffinée" du théorème de Dirichlet, et on peut écrire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_a(t) = a_0(f_a) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f_a)\cos nt,$$

et une formule analogue pour f_{-a}.

Or $a_0(f_a) + a_0(f_{-a}) = \dfrac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{a\pi} = \dfrac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{a\pi}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$a_n(f_a) + a_n(f_{-a}) = \frac{2a}{(n^2+a^2)\pi}(-1)^n(e^{a\pi}-e^{-a\pi}) = \frac{4a}{(n^2+a^2)\pi}(-1)^n\,\mathrm{sh}\,a\pi,$$

de sorte qu'on peut écrire, pour tout réel t, et donc aussi pour tout $t \in [-\pi, \pi]$:

$$f_a(t) + f_{-a}(t) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{a\pi} + \frac{4a\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}\cos nt.$$

Question I.6

I.6.a Posant $t=0$ dans l'égalité précédente, il vient $f_a(0)+f_{-a}(0)=\dfrac{2\operatorname{sh}a\pi}{a\pi}+\dfrac{4a\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$.

Or $f_a(0)=f_{-a}(0)=1$, donc finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}=\frac{a\pi-\operatorname{sh}a\pi}{2a^2\operatorname{sh}a\pi}$.

I.6.b De même, posant $t=\pi$, il vient $f_a(\pi)+f_{-a}(\pi)=\dfrac{2\operatorname{sh}a\pi}{a\pi}+\dfrac{4a\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$.

Or $f_a(\pi)+f_{-a}(\pi)=2\operatorname{ch}a\pi$, donc finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{a\pi\operatorname{ch}a\pi-\operatorname{sh}a\pi}{2a^2\operatorname{sh}a\pi}$.

Partie II

Question II.1

II.1.a $(x,t)\mapsto\cos(xt)$ et $(x,t)\mapsto\operatorname{ch}t$ sont évidemment continues (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, donc g est également continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur ce même domaine.
On majore, pour $x\in\mathbb{R}$ et $t\geqslant 0$: $|g(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{\operatorname{ch}t}=\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}\leqslant\dfrac{2}{e^t}$.

II.1.b Voici l'énoncé du théorème utile (continuité d'une intégrale impropre à paramètre), avec les notations de ce problème : on considère deux intervalles I et J de $\mathbb{R}$ et une fonction g continue sur $I\times J$. On pose, pour $x\in I$, $\psi(x)=\displaystyle\int_J g(x,t)\,dt$. S'il existe une fonction de domination $\varphi:J\to\mathbb{R}$ telle que $\forall(x,t)\in I\times J, |g(x,t)|\leqslant\varphi(t)$ et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_J\varphi(t)\,dt$ est absolument convergente, alors on peut affirmer que la fonction ψ est définie et continue sur tout I.
Les hypothèses sont ici remplies, en posant $\varphi(t)=2e^{-t}$ car on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt$ est absolument convergente. On conclut donc que ψ existe et est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Question II.2

II.2.a On part du membre de droite :

$$\sum_{k=0}^{N}(-1)^kX^K+\frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}=\frac{1-(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1-(-X)}+\frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}=\frac{1}{1+X}.$$

Posant $X=e^{-2t}$, on observe que $\dfrac{1}{1+X}=\dfrac{1}{1+e^{-2t}}=\dfrac{e^t}{e^t+e^{-t}}=\dfrac{e^t}{2\operatorname{ch}t}$, donc

$$\frac{e^t}{2\operatorname{ch}t}=\sum_{k=0}^{N}(-1)^ke^{-2kt}+\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}},$$

et il suffit de multiplier par $2e^{-t}$ pour obtenir :

$$\frac{1}{\operatorname{ch}t}=2e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^ke^{-2kt}+\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right).$$

II.2.b On remplace simplement $\dfrac{1}{\operatorname{ch}t}$ dans l'expression intégrale de $\psi(x)$.

Question II.3

II.3.a Pour tout réel x et tout $t\geqslant 0$, $e^{-t}\leqslant 1$, $|\cos xt|\leqslant 1$ et $1+e^{-2t}\geqslant 1$ de sorte que $|h(x,t)|\leqslant 1$: on en déduit que h est bien bornée sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

On en profite pour démontrer l'existence (qui semble sous-entendue par l'énoncé) de $R_N(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (-1)^{N+1} h(x,t) e^{-2(N+1)t}\, dt$: en effet, on a la majoration $\left|(-1)^{N+1} h(x,t) e^{-2(N+1)t}\right| \leqslant e^{-2(N+1)t}$, or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t}\, dt$ converge, donc l'intégrale qui définit $R_N(x)$ est absolument convergente.

II.3.b La majoration précédente montre que, pour tout N et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_N(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t}\, dt = \frac{1}{2(N+1)}$$

qui tend vers 0 quand $N \to +\infty$, donc, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$.

Question II.4

On procède par double intégration par parties : à k et x fixés, on peut écrire, pour tout réel $A > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-t} \cos xt\; e^{-2kt}\, dt &= \left[-\frac{e^{-(2k+1)t}}{2k+1} \cos xt\right]_0^A - \frac{x}{2k+1} \int_0^A e^{-(2k+1)t} \sin xt\, dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(2k+1)t}}{2k+1} \cos xt + \frac{x e^{-(2k+1)t}}{(2k+1)^2} \sin xt\right]_0^A - \frac{x^2}{(2k+1)^2} \int_0^A e^{-(2k+1)t} \cos xt\, dt\end{aligned}$$

Passant à la limite quand $A \to +\infty$, on obtient $J_k(x) = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{x^2}{(2k+1)^2} J_k(x)$ donc finalement

$$J_k(x) = \frac{2k+1}{x^2 + (2k+1)^2}.$$

Question II.5

Le résultat de II.2.c se réécrivait, pour tout réel x : $\psi(x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k J_k(x) + 2R_N(x)$. Or on a vu que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$: c'est exactement dire que $\psi(x)$ est la somme de la série des $2(-1)^k J_k(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{avec } u_k(x) = (-1)^k \frac{2(2k+1)}{x^2 + (2k+1)^2}.$$

Partie III

Question III.1

Soit $t \notin \pi\mathbb{Z}$. On a alors $e^{2it} \neq 1$ donc on peut écrire

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{2ikt} = \sum_{k=-N}^{N} (e^{2it})^k = e^{-2iNt} \frac{e^{2(2N+1)it} - 1}{e^{2it} - 1} = \frac{e^{(2N+2)it} - e^{-2Nit}}{e^{2it} - 1} = \frac{e^{(2N+1)it} - e^{-(2N+1)it}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{\sin(2N+1)t}{\sin t}.$$

Question III.2

III.2.a La fonction S_N est clairement π-périodique, et on a $\displaystyle\lim_{t\to 0} S_N(t) = 2N+1$. On peut donc prolonger S_N en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier en posant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{S}_N(k\pi) = 2N+1$.

III.2.b $\tilde{S}_N$ est π-périodique, donc aussi 2π-périodique.

III.2.c D'après l'écriture sommatoire de $S_N(t)$, qui est toujours valable pour $\tilde{S}_N(t)$, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\tilde{S}_N(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} \left|e^{2ikt}\right| = 2N+1$, donc $\tilde{S}_N$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Question III.3
L'application $t \mapsto e^{-2at}\tilde{S}_N(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et sa valeur absolue est majorée par $(2N+1)e^{-2at}$. Comme $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2at}\,dt$ converge, donc $I_{a,N}$ est aussi convergente.

Question III.4
Chaque intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt$ est absolument convergente (donc une intégrale convergente), puisque $\left|e^{2ikt}e^{-2at}\right| \leqslant e^{-2at}$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2at}\,dt$ converge.
Développant $\tilde{S}_N(t)$ grâce à la formule sommatoire obtenue en III.1, on trouve directement la première égalité.
Or on peut, grâce à la définition d'une intégrale impropre, puis à la formule de Chasles, écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n-1}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt\\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt\end{aligned}$$

Le changement de variable $u = 2t$ fournit $\displaystyle\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{2ikt}e^{-2at}\,dt = \frac{1}{2}\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku}e^{-au}\,du$, et la deuxième égalité en découle aussitôt.

Question III.5
III.5.a Si $t \in [0,\pi[$, $g_a(t) = f_{-a}(t) = e^{-at}$. Si $t \in [\pi, 2\pi[$, $g_a(t) = e^{-a\pi}f_{-a}(t-\pi)$ or $t - \pi \in [0,\pi[$, donc finalement $g_a(t) = e^{-a\pi}e^{-a(t-\pi)} = e^{-at}$. On a bien montré que pour t de $[0, 2\pi[$, on dispose de $g_a(t) = e^{-at}$.
Remarquons que $g_a(2\pi - 0) = e^{-2a\pi} \neq 1 = g_a(0) = g_a(2\pi)$, donc cette fois g_a est continue par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais non continue.
III.5.b Dans la formule obtenue en III.4, on peut intervertir les deux symboles $\sum$, puisque la première somme est finie ; on a donc

$$I_{a,N} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\int_{2p\pi}^{2(p+1)\pi} e^{iku}e^{-au}\,du = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi}\sum_{k=-N}^{N}\int_0^{2\pi} e^{ikv}e^{-av}\,dv,$$

en utilisant le changement de variable $v = u - 2p\pi$.
Réécrivons $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikv}e^{-av} = e^{-av} + e^{-av}\sum_{k=1}^{N}(e^{ikv} + e^{-ikv}) = e^{-av} + 2e^{-av}\sum_{k=1}^{N}\cos kv.$
Or, par définition des coefficients de Fourier, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-av}\,dv = 2\pi a_0(g_a)$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-av}\cos kv\,dv = \pi a_k(g_a)$.
Ainsi $\displaystyle I_{a,N} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} \times \left(2\pi a_0(g) + 2\sum_{k=1}^{N}\pi a_k(g_a)\right) = \pi\left(\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi}\right) \times \left(\sum_{k=0}^{N} a_k(g_a)\right)$.
III.5.c $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-2ap\pi} = \frac{1}{1 - e^{-2a\pi}}$, donc $\displaystyle I_{a,N} = \frac{\pi}{1 - e^{-2a\pi}}\sum_{k=0}^{N} a_k(g_a)$.

Question III.6
On évalue, avec la double intégration par parties que nous avons déjà effectuée à plusieurs reprises : $\displaystyle a_0(g_a) = \frac{1 - e^{-2a\pi}}{2a\pi}$ et $\displaystyle a_k(g_a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-at}\cos kt\,dt = \frac{a(1 - e^{-2a\pi})}{\pi(a^2 + k^2)}$.
On en déduit que $\displaystyle I_{a,N} = \frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{N}\frac{a}{a^2 + k^2}$, et le résultat de la question I.5.b montre que quand $N \to +\infty$, $I_{a,N}$ a une limite égale à $\displaystyle I_a = \frac{1}{2a} + \frac{a\pi\,\mathrm{ch}\,a\pi - \mathrm{sh}\,a\pi}{2a\,\mathrm{sh}\,a\pi} = \frac{\pi}{2\,\mathrm{th}\,a\pi}$.