Corrigé de l'épreuve Math C, Banque PT 2012

Nathalie Planche

Préambule:

1. Pour tout réel t, $Y(t)=\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y'(t) \\ -\frac{b(t)}{a(t)}y'(t)-\frac{c(t)}{a(t)}y(t)+\frac{h(t)}{a(t)}\end{pmatrix}$ car y est solution de (ε) et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)}\end{pmatrix}$$

On a donc bien montré que $\boxed{\text{Y est solution du système différentiel (S) : } Y'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}Y(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)}\end{pmatrix}}$

2. L'équation (ε_0) est une équation différentielle linéaire scalaire, homogène d'ordre 2, et tel que a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, on peut donc affirmer que $\boxed{\text{l'espace vectoriel des solutions de } (\varepsilon_0) \text{ est de dimension 2}}$.

3. W est solution de (S) $\Leftrightarrow$ $\forall t\in\mathbb{R}$, $W'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}W(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)}\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, \lambda(t)U'(t)+\lambda'(t)U(t)+\mu(t)V'(t)+\mu'(t)V(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}W(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)}\end{pmatrix}$$

Or u et v sont solutions de l'équation (ε_0) , donc $U'(t)=\begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}U(t)$

et de même $V'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}V(t)$

On a donc $\lambda(t)U'(t)+\mu(t)V'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}(\lambda(t)U'(t)+\mu(t)V'(t))=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}W(t)$

On peut donc écrire:

W est solution de (S) $\Leftrightarrow$ $\forall t\in\mathbb{R}, \lambda'(t)U(t)+\mu'(t)V(t)+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}W(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c(t)}{a(t)} & -\frac{b(t)}{a(t)}\end{pmatrix}W(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h(t)}{a(t)}\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{W est solution de (S) } \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, \lambda'(t)U(t)+\mu'(t)V(t)=\mathrm{H(t)}}$

4. Il suffit de remplacer, dans l'équation $\lambda'(t)U(t)+\mu'(t)V(t)$ =H(t), U, V et H par leur définition, pour obtenir le système vrai pour tout réel t: $\boxed{\begin{cases}\lambda'(t)u(t)+\mu'(t)v(t)=0 \\ \lambda'(t)u'(t)+\mu'(t)v'(t)=\frac{h(t)}{a(t)}\end{cases}}$

Partie I:

I.1.i. Si $t=0$, la série converge car tous les termes de cette série sont nuls.

Si $t \neq 0$, appliquons le critère de d'Alembert pour des séries numériques: $\left|\frac{(-1)^{p+1}t^{2p+2}}{(-1)^p t^{2p}}\right| = t^2$, donc la série converge

si $t^2 < 1$, et diverge si $t^2 > 1$. Or $t^2 < 1 \Leftrightarrow |t| < 1$, $t^2 > 1 \Leftrightarrow |t| > 1$, on peut donc en conclure :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum_{p \geqslant 0}(-1)^p t^{2p} \text{ est 1}}.$$

$\forall\ t \in]-1,1[$, $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-t^2)^p = \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$ car $\sum_{p=0}^{+\infty}(u)^p = \frac{1}{1-u}$ pour $u \in]-1,1[$

I.1.ii. De manière analogue à la question précédente, on montre que :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série } \sum_{p \geqslant 0}(-1)^p t^{2p+1} \text{ est 1}}.$$

$\forall\ t \in]-1,1[$, $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p+1} = t\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p t^{2p} = \boxed{\frac{t}{1+t^2}}$

I.2. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) = 0 \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = a \Leftrightarrow \boxed{\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = at+b}$

I.3.a.i. Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : t \mapsto (1+t^2)f(t)$

On a alors, pour tout réel t:

- $g'(t) = (1+t^2)f'(t) + 2tf(t)$
- $g''(t) = (1+t^2)f''(t) + 4tf'(t) + 2f(t) = 0$ car f est une solution de (ε_h)

D'après la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{g est une fonction affine}}$.

I.3.a.ii. On a donc montré que si f est une solution de (ε_h), alors $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{at+b}{1+t^2}$

Notons y_1 et y_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $y_2(t) = \frac{t}{1+t^2}$,

et (S_H) l'espace vectoriel des solutions de (ε_h).

Nous avons donc prouvé que $(S_H) \subset Vect\{y_1, y_2\}$

De plus, les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, car si α et β sont deux réels tels que

$\forall t\in\mathbb{R},\ \alpha y_1+\beta y_2=0$, alors $\forall t\in\mathbb{R},\ \dfrac{\alpha+\beta t}{1+t^2}=0$, donc $\forall t\in\mathbb{R},\ \alpha+\beta t=0$, d'où $\alpha=\beta=0$

Comme de plus $dim(S_H)=2$ (d'après le cours car $(1+t^2)$ ne s'annule jamais), on peut affirmer que :

$$\boxed{(S_H)\ =\ Vect\{y_1y_2\}\text{ et }\{y_1y_2\}\text{ est une base de }(S_H)}$$

<u>I.3.b.i.</u> Notons R le rayon de convergence de la série cherchée.

$\forall t\in]-R,R[,\ y'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nt^{n-1}\ ,\ y''(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}$

En reportant dans l'équation (ε_h), on obtient:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}+\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nt^n+\sum_{n=0}^{+\infty}4na_nt^n+\sum_{n=0}^{+\infty}2a_nt^n=0\ (*)$$

Effectuons le changement d'indice $p=n-2$ dans la première somme,

on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nt^{n-2}=\sum_{p=0}^{+\infty}(p+2)(p+1)a_{p+2}t^p$

On regroupe alors tous les termes de $(*)$ dans une même somme, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n(n-1)+4n+2)a_n\right)t^n=0$$

Une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc

$\forall n\in\mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2}+(n(n-1)+4n+2)a_n=0$

Or $n(n-1)+4n+2=\ n^2+3n+2$, trinôme qui admet -1 et -2 pour racines.

Donc $n(n-1)+4n+2=\ (n+1)(n+2),$ qui est non nul pour tout entier naturel n.

On a donc: $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}+a_n=0}$

<u>I.3.b.ii.</u> On montre, par récurrence que $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p}=(-1)^pa_0\text{ et }a_{2p+1}=(-1)^pa_1}$

- les formules sont évidentes pour p=0

- supposons les formules vraies à un certain rang p, et montrons les au rang p+1.
  En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a
  $a_{2(p+1)} = a_{2p+2} = -a_{2p} = (-1)^{p+1}a_0$ et $a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = -a_{2p+1} = (-1)^{p+1}a_1$
  ce qui achève la récurrence.

I.3.b.iii. $\forall$t$\in$]-R,R[, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p a_0 t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p a_1 t^{2p+1} = \boxed{a_0 \frac{1}{1+t^2} + a_1 \frac{t}{1+t^2}}$ d'après la question **I.1.**

I.4.a. D'après la question 4. du préambule, avec ici pour tout réel t:

$u(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $v(t) = \frac{t}{1+t^2}$, $h(t) = \frac{1}{1+t^2}$, $a(t) = 1+t^2$, et donc $u'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$, $v'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$,

on peut donc écrire le système: $\boxed{\begin{cases} \frac{1}{1+t^2}\lambda'(t) + \frac{t}{1+t^2}\mu'(t) = 0 \\ \frac{-2t}{(1+t^2)^2}\lambda'(t) + \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\mu'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{cases}}$ (S)

I.4.b. (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t)+t\mu'(t)=0 \\ -2t\lambda'(t)+(1-t^2)\mu'(t)=1 \end{cases}$ car pour tout réel t, $1+t^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t) = -t\mu'(t) \\ (1+t^2)\mu'(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}}$$

I.4.c. $\forall$t$\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} \lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\exists\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R}, \begin{cases} \lambda(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+a \\ \mu(t) = \text{Arctan}(t)+b \end{cases}}$

I.4.d. D'après le résultat établi dans le préambule, la solution générale de (ε) est $y(t) = \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$, c'est-à-dire ici: $\boxed{\exists\ (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\ y(t) = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bt}{1+t^2} - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} + \frac{t\,\text{Arctan}(t)}{1+t^2}}$

Partie II:

II.1. Soit n un entier naturel non nul.

$\varphi(n) = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1-2t}{1+t^2}dt = \left[\text{Arctan}(t) - \ln(1+t^2)\right]_0^{1/n}$, d'où $\boxed{\varphi(n) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

II.2.

Si g est de classe C^p sur un intervalle I et si $x_0 \in$ I, alors $\forall$ x $\in$ I :

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{1}{p!}g^{(p)}(x_0)(x-x_0)^p+o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)=\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}g^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)$$

II.3. On utilise le développement limité usuel de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ au voisinage de 0:

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+..+u^p+o_0(u^p) = \sum_{k=0}^{p} u^k+o_0(u^p)$$

En remplaçant u par $(-x^2)$, on obtient : $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-..+(-1)^p x^{2p}+o_0(x^{2p}) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k x^{2k}+o_0(x^{2p})}$

On primitive alors ce développement limité pour obtenir (en utilisant Arctan(0)=0):

$$\boxed{\text{Arctan}(x) = x-\frac{x^3}{3}+..+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1}+o_0(x^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o_0(x^{2p+1})}$$

II.4. On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Cette fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=0$

Cette fonction est donc constante sur $]0,+\infty[$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, on peut conclure que

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[\text{ , Arctan}(x)+\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

II.5. $\cos(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln(n)) = \cos\left(\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\text{Arctan}(n)-\ln(1+n^2)+2\ln(n)\right)$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\ln(1+n^2)-\ln(1+n^2)+\ln(n^2)\right)$

$= \sin\left(2\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ après simplification dans les logarithmes népériens.

$= \sin\left(2\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{2n^4}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)\right)$ car $\ln(1+u) = u-\dfrac{u^2}{2}+o_0(u^2)$

$= \dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^4}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$ car $\sin(u) = u-\dfrac{u^3}{6}+o_0(u^4)$

On a donc $\boldsymbol{n^4\,(\cos(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln(n))-\frac{2}{n^2}) = -1+o_{+\infty}(1)}$, qui tend vers -1 lorsque n tend vers $+\infty$.

A partir d'un certain rang, cette quantité sera par exemple, en valeur absolue, inférieure ou égale à $\beta = 2$.

On peut donc affirmer : $\boxed{\exists\ \beta > 0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |n^4\,(\cos(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln(n))-\frac{2}{n^2})\,| \leqslant \beta}$. (On a donc α=2)

II.6. En reprenant le développements asymptotiques déterminé à la question précédente, on peut donc affirmer qu'au voisinage de $+\infty$, $\boxed{\textbf{cos}(\varphi(\boldsymbol{n})+\psi(\boldsymbol{n})+2\textbf{ln}(\boldsymbol{n}))\textbf{ est équivalent à } \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{n}^2}}$.

Ces deux expressions ont donc même signe au voisinage de $+\infty$, donc au voisinage de $+\infty$, la série

$\sum\limits_{n>0}\cos(\varphi(n)+\psi(n)+2\ln(n))$ est à termes positifs, et $\boxed{\text{converge}}$ d'après le critère de l'équivalent avec la série

de Riemann $\sum\limits_{n>0}\frac{2}{n^2}$

II.7. Pour tout entier n non nul, $\cos(\varphi(n)) = \cos\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$, qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n>0}\cos(\varphi(n)) \text{ diverge grossièrement}}$.

Partie III:

III.1. Pour tout réel x, $\boxed{\Phi(x) = \text{Arctan}(x)}$, et la fonction Arctan est d'après le cours définie et continue sur $\mathbb{R}$.

III.2.a.b. Toujours d'après le cours, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi(x) = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = -\frac{\pi}{2}}$. Pour la suite, on a donc $\boxed{\ell = \frac{\pi}{2}}$.

III.3. Soient X et Y deux réels.

$$\int_X^Y(\Phi(t+a)-\Phi(t+b))\mathrm{d}t-\int_X^{X+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t+\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{X+b-a}^{Y+(b-a)}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-\int_X^Y\Phi(t+b)\mathrm{d}t$$ d'après la relation de Chasles.

$$= \int_X^Y\Phi(u+b)\mathrm{d}u-\int_X^Y\Phi(t+b)\mathrm{d}t$$ grâce au changement de variable $u = t+a-b$ dans la première intégrale.

$$= 0$$

Nous avons donc bien montré que $\boxed{\int_X^Y(\Phi(t+a)-\Phi(t+b))\mathrm{d}t = \int_X^{X+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t}$

III.4. $\lim_{t\to+\infty}\Phi(t+a)-\frac{\pi}{2}=0$, donc par définition de la limite, si ε est un réel strictement positif fixé, on peut affirmer

qu'$\boxed{\text{il existe un réel } Y_0 \text{ tel que : } t\geqslant Y_0 \Rightarrow |\Phi(t+a)-\frac{\pi}{2}|\leqslant\varepsilon}$

III.5. Si $Y\geqslant Y_0$, on a alors:

$$\left|\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-(b-a)\frac{\pi}{2}\right| = \left|\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-\int_Y^{Y+b-a}\frac{\pi}{2}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_Y^{Y+b-a}\left(\Phi(t+a)-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t\right|$$

Or d'après l'inégalité de la moyenne, $\left|\int_Y^{Y+b-a}\left(\Phi(t+a)-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_Y^{Y+b-a}\left|\Phi(t+a)-\frac{\pi}{2}\right|\mathrm{d}t$

De plus, puisque $Y\geqslant Y_0$, on peut dire que $\forall t\in[Y\,;\,Y+b-a]$, $|\Phi(t+a)-\frac{\pi}{2}|\leqslant\varepsilon$

On a donc finalement $\left|\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-(b-a)\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\int_Y^{Y+b-a}\varepsilon\mathrm{d}t$, c'est-à-dire:

$$\boxed{\left|\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-(b-a)\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\varepsilon(b-a)}$$

III.6. $\lim_{t\to-\infty}\Phi(t+a)+\frac{\pi}{2}=0$, donc par définition de la limite, si ε est un réel strictement positif fixé, on peut affirmer

qu'$\boxed{\text{il existe un réel } X_0 \text{ tel que : } t\leqslant X_0 \Rightarrow |\Phi(t+a)+\frac{\pi}{2}|\leqslant\varepsilon}$

III.7. Grâce à la question **III.5**. , nous avons donc montré que :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists Y_0\in\mathbb{R},\ Y\geqslant Y_0\Rightarrow\left|\frac{1}{b-a}\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\varepsilon$$

Ceci est exactement la définition de $\lim_{Y\to+\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t\right)=\frac{\pi}{2}$,

c'est-à-dire $\boldsymbol{\lim_{Y\to+\infty}\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t=(b-a)\frac{\pi}{2}}$

De la même façon, grâce à la question III.6. , $\forall\varepsilon>0,\ \exists X_0\in\mathbb{R},\ X\leqslant X_0\Rightarrow\left|\frac{1}{b-a}\int_X^{X+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t+\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\varepsilon$

Ceci prouve que $\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_X^{X+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t\right)=-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\lim_{X\to-\infty}\int_X^{X+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t=-(b-a)\frac{\pi}{2}}$

On passe alors à la limite lorsque X tend vers –∞ et lorsque Y tend vers +∞ dans l'égalité:

$\int_X^Y(\Phi(t+a)-\Phi(t+b))\mathrm{d}t=\int_X^{X+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t-\int_Y^{Y+b-a}\Phi(t+a)\mathrm{d}t$, d'où:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}(\Phi(t+a)-\Phi(t+b))\mathrm{d}t=-\pi(b-a)}$$

<u>III.8.a.</u> Soit $X \in \mathbb{R}^+$

On applique alors le résultat établi à la question III.3. avec $Y = 0$, $a = 0$ et $b = 1$.

On a alors: $\boxed{\int_0^X (\Phi(t+1) - \Phi(t))\mathrm{d}t \;=\; \int_X^{X+1} \Phi(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 \Phi(t)\mathrm{d}t}$

<u>III.8.b.</u>

$\int_0^1 \Phi(t)\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t = [t\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ grâce à une intégration par parties

$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1$, d'où finalement $\boxed{\int_0^1 \Phi(t)\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}}$

<u>III.8.c.</u> Il s'agit exactement de la définition de $\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{\pi}{2}$

<u>III.8.d.</u> D'après les questions **<u>III.8.a.</u>** et **<u>III.8.b.</u>** , on a donc $\int_0^X (\Phi(t+1) - \Phi(t))\mathrm{d}t \;=\; \int_X^{X+1} \Phi(t)\mathrm{d}t - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$ (*)

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\ X_1 \in \mathbb{R}^+$ tel que si $X \geqslant X_1$, alors :

$$\left| \int_X^{X+1} \Phi(t)\mathrm{d}t \;-\; \frac{\pi}{2} \right| \;=\; \left| \int_X^{X+1} \left(\Phi(t) - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_X^{X+1} \left|\Phi(t) - \frac{\pi}{2}\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_X^{X+1} \varepsilon \mathrm{d}t \;= \varepsilon$$

Nous venons de prouver que $\boldsymbol{\lim_{X \to +\infty} \int_X^{X+1} \Phi(t)\mathrm{d}t \;= \frac{\pi}{2}}$

Finalement, en passant à la limite lorsque X tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on a donc:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} (\Phi(t+1) - \Phi(t))\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}}$$

<u>III.9.</u> Soit k un entier naturel fixé, et soit **t un réel de l'intervalle $[k, k+1]$.**

Appliquons le ***théorème des accroissements finis*** à la fonction $\Phi = \mathrm{Arctan}$ entre t et $t+1$ (cette fonction étant infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$): $\exists\, c \in]t\,;\,t+1[\,,\ \Phi(t+1) - \Phi(t) = \Phi'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

Or $c \in]t\,;\,t+1[\ \Rightarrow c \in]k\,;\,k+2[\ \Rightarrow\ \frac{1}{(k+2)^2+1} \leqslant \frac{1}{1+c^2} \leqslant \frac{1}{k^2+1}$

Donc par croissance de l'intégrale, on a donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+2)^2+1}\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t))\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2+1}\mathrm{d}t$, c'est-à-dire

finalement $\boxed{\frac{1}{(k+2)^2+1} \leqslant \int_k^{k+1} (\Phi(t+1) - \Phi(t))\mathrm{d}t \;\leqslant\; \frac{1}{k^2+1}}$

III.10. D'après la question **III.8.d.** , l'intégrale $\int_0^{+\infty}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t$ est bien convergente vers $\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}$

Pour tout entier naturel N, on peut écrire:

$$\sum_{k=0}^{N}\int_k^{k+1}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t = \int_0^{N+1}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t \quad \text{tend vers } \frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2} \text{ lorsque N tend vers } +\infty.$$

Donc la série $\sum_{k\geqslant 0}\int_k^{k+1}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t$ est convergente et

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t}$$

III.11. En utilisant la question **III.9.** , on en déduit $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+2)^2+1} \leqslant \int_0^{+\infty}(\Phi(t+1)-\Phi(t))\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k^2+1}}$

Remarque: ces deux séries sont bien convergentes car leur terme généraux respectifs sont positifs et équivalents aux termes généraux de séries de Riemann convergentes.